Séminaire BOURBAKI Novembre 2016
69e année, 2016–2017, no 1122, p. 53 à 90
doi:10.24033/ast.1060

POSITIVITÉ DES IMAGES DIRECTES ET APPLICATIONS [d'après Bo Berndtsson]

par **Mihai PĂUN**

1. INTRODUCTION

Le but de ce texte est de présenter une partie des travaux récents de Bo Berndtsson [**4**], [**5**], [**7**] ainsi que certaines de leurs nombreuses conséquences obtenues en analyse et géométrie complexe. En guise d'introduction, nous allons évoquer un beau résultat de géométrie convexe qui a été une importante source d'inspiration pour l'article [**4**] et ceux qui ont suivi.

Soit $\mathscr{A} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un ensemble convexe. On définit ses sections par rapport à la projection sur le 1er facteur :

$$\mathscr{A}_t := \{x \in \mathbb{R}^n : (t, x) \in \mathscr{A}\}\,. \tag{1}$$

Une des versions du théorème de Brunn-Minkowski (cf. e.g., [**33**]) s'énonce comme suit

Théorème 1.1. — *La fonction* $t \to (\mathrm{Vol}\mathscr{A}_t)^{\frac{1}{n+1}}$ *est concave.*

C'est un résultat fondamental en géométrie convexe ; une version « fonctionnelle » a été obtenue par Leindler-Prekopa, cf. e.g., [**52**].

Théorème 1.2 ([**52**]). — *Soit* $\varphi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ *une fonction convexe. On définit la fonction* $\widetilde{\varphi}$ *par la formule suivante*

$$e^{-\widetilde{\varphi}(t)} := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\varphi(t,x)} d\lambda(x). \tag{2}$$

Alors $\widetilde{\varphi}$ *est convexe.*

Compte tenu de l'importance de ce type de propriétés en géométrie convexe, il est naturel d'essayer d'en formuler et démontrer une version *complexe.* Cela veut dire qu'on remplace $\mathbb{R}^n$ par $\mathbb{C}^n$ et l'hypothèse φ *convexe* par φ *plurisousharmonique* (qu'on va abréger en *psh* par la suite). Malheureusement, la fonction $\widetilde{\varphi}$ qui en résulte – i.e., définie selon l'égalité (2) – peut ne pas être psh, comme le montre l'exemple suivant dû à C. Kiselman, cf. [**43**]

Soit $\varphi(w,z) := |z-w|^2 - |z|^2$; c'est une fonction psh dans $\mathbb{C}^2$. Un calcul sans difficulté montre qu'on a $\widetilde{\varphi}(z) = -|z|^2 + c$, où c est une constante dont la valeur est sans importance ; on voit que $\widetilde{\varphi}$ n'est pas psh.

La généralisation naïve du théorème 1.2 n'est donc pas vraie. Afin d'obtenir la version juste, il faut changer un peu de point de vue, comme suit. La fonction $\widetilde{\varphi}$ dans (2) s'écrit

$$\widetilde{\varphi}(t) = \log \frac{1}{\int_{\mathscr{A}_t} e^{-\varphi(t,x)} d\lambda(x)} \tag{3}$$

et pour chaque $t \in \mathbb{R}$ on a

$$e^{\widetilde{\varphi}(t)} = \sup_{f \in \ker(d), \|f\|_t \leq 1} |f(x)|^2 \tag{4}$$

où $\|f\|_t^2 := \int_{\mathbb{R}^n} |f|^2 e^{-\varphi(t,x)} d\lambda(x)$. On a noté d l'opérateur de Poincaré. Les égalités (3) et (4) sont equivalentes simplement parce qu'une fonction se trouve dans le noyau de l'opérateur d si et seulement si elle est constante.

L'analogue de l'opérateur d en analyse complexe est l'opérateur $\overline{\partial}$ et son noyau se trouve être l'espace des fonctions holomorphes. Dans (4), on devrait plutôt considérer le sup pour toutes les fonctions holomorphes de norme au plus un. L'exemple suivant [**47**] montre qu'on est sur la bonne voie. Soit ρ une fonction sousharmonique, et soit $\mathscr{D} \subset \mathbb{C}^2$ le domaine (de Hartogs) correspondant

$$\mathscr{D} := \left\{ (t,z) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} : |z|^2 < e^{-2\rho(t)} \right\}. \tag{5}$$

La tranche $\mathscr{D}_t \subset \mathbb{C}$ est le disque de rayon $e^{-\rho(t)}$, et la fonction analogue de $\widetilde{\varphi}$ s'écrit

$$e^{\widetilde{\varphi}(t,z)} = \sup_{\overline{\partial} f = 0, \|f\|_t \leq 1} |f(z)|^2, \tag{6}$$

où la norme est $\|f\|_t^2 := \int_{\mathscr{D}_t} |f(z)|^2 d\lambda$. Autrement dit, $e^{\widetilde{\varphi}(t,z)}$ est le *noyau de Bergman* du domaine $\mathscr{D}_t$ évalué en z. Il se trouve que le disque a suffisamment de symétries pour pouvoir calculer son noyau de Bergman explicitement. On a

$$e^{\widetilde{\varphi}(t,z)} = \frac{1}{\pi\left(1 - |z|^2 e^{2\rho(t)}\right)^2} \tag{7}$$

et donc on en déduit que $\widetilde{\varphi}$ est une fonction psh *dans l'ensemble des variables* (bien entendu le fait intéressant, c'est la positivité de la hessienne par rapport à t).

Parmi les premiers résultats qui pointent dans cette direction, on a choisi celui de F. Maitani-H. Yamaguchi ; le contexte est le suivant. Soit $\mathscr{D} \subset B \times \mathbb{C}$ un domaine pseudo-convexe, où B est la boule unité dans $\mathbb{C}$. Pour chaque $t \in B$ on définit le noyau de Bergman de la fibre $p^{-1}(t)$, où $p : \mathscr{D} \to B$ est la projection sur le 1$^{\text{er}}$ facteur :

$$K(t, \xi) := \sup_{f \in B_t(1)} |f(\xi)|^2 \tag{8}$$

avec

$$B_t(1) := \left\{ f \in \mathscr{O}(\mathscr{D}_t) : \int_{\mathscr{D}_t} |f|^2 d\lambda \leq 1 \right\}, \quad \mathscr{D}_t := p^{-1}(t). \tag{9}$$

Un premier résultat obtenu dans [**47**] est le suivant.

Théorème 1.3 ([**47**]). — *La fonction* $(t, \xi) \to \log K(t, \xi)$ *est psh.*

La démonstration de ce résultat (cf. [**47**]) n'est pas excessivement difficile, mais elle repose sur des outils de la théorie du potentiel spécifiques à la dimension un (i.e., la dimension des fibres de p). En particulier, Maitani-Yamaguchi utilisent de manière essentielle le fait que le noyau de Bergman est la hessienne de la fonction de Robin et la formule de variation de Hadamard. Ces résultats n'ont pas d'analogue en plusieurs variables complexes.

Heureusement, B. Berndtsson a obtenu (cf. [**4**]) une nouvelle preuve du théorème 1.3, ce qui lui a permis de généraliser ce résultat dans le cadre suivant.

Soit $\mathscr{D} = U \times \Omega \subset \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n$ un domaine pseudoconvexe, et soit $\varphi \in \mathrm{Psh}(\overline{\mathscr{D}})$ une fonction psh sur $\mathscr{D}$ qu'on suppose dans un premier temps de classe $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de $\mathscr{D}$. Dans ce cas, on a $\mathscr{D}_t = \Omega$ et on note

$$A_t^2 := \left\{ f \in \mathscr{O}(\Omega) : \int_\Omega |f|^2 e^{-\varphi(t,\cdot)} d\lambda < \infty \right\} \tag{10}$$

le noyau de Bergman pondéré correspondant à $(\Omega, e^{-\varphi(t,\cdot)})$. Soit $\mathscr{E} \to U$ le fibré de rang infini dont la fibre $\mathscr{E}_t$ est l'espace de Bergman A_t^2. On munit $\mathscr{E}_t$ du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle_t := \int_\Omega f \overline{g} e^{-\varphi(t,\cdot)} d\lambda \tag{11}$$

et donc $\mathscr{E}$ est un fibré trivial, muni d'une structure métrique qui varie par rapport à t.

Le résultat de Berndtsson dans [**4**] est le suivant.

Théorème 1.4 ([**4**]). — *Le fibré hermitien* $(\mathscr{E}, \| \cdot \|)$ *est positif au sens de Nakano.*

On remarque tout de suite que le théorème 1.4 est une généralisation de 1.3 : la positivité au sens de Nakano de $\mathscr{E}$ implique en particulier que la fonction

$$t \to \log \|\psi\|_{\star t}^2 \tag{12}$$

est psh, pour toute section holomorphe ψ du fibré dual $\mathscr{E}^\star$ définie localement au voisinage d'un point de U. Dans (12), on note $\| \cdot \|_\star^2$ la norme induite sur $\mathscr{E}^\star$. Soit $t_0 \in B$

un point arbitraire, et soit σ une section de la projection $\mathscr{D} \to B$. On définit la section locale ψ de $\mathscr{E}^\star$ comme suit

$$\langle \psi, f\rangle := f(\sigma_t), \tag{13}$$

i.e., pour tout $f \in \mathscr{E}_t$ c'est l'évaluation au point σ_t. La norme de l'application d'évaluation coïncide avec le noyau de Bergman, donc la fonction

$$t \to \log K(\sigma_t) \tag{14}$$

est psh, ce qu'il fallait démontrer. Remarquons au passage que la fonction (12) est psh *pour toute fonctionnelle holomorphe* ξ ; cela va jouer un rôle important par la suite.

Remarque 1.5. — Le cas où l'ensemble $\mathscr{D}$ n'est pas nécessairement un produit est une conséquence du théorème 1.4, en utilisant des fonctions poids adéquates, cf. [**4**], [**10**].

Remarque 1.6. — L'énoncé 1.4 peut être également interprété comme une version complexe du théorème de Leindler-Prékopa mentionné au début de l'introduction. En effet, dans le contexte réel les espaces A^2_t s'identifient à $\mathbb{R}$ et donc la convexité de $\widetilde{\varphi}$ devient la positivité de la courbure au sens de Nakano.

Considérons à présent une application surjective propre $p : X \to Y$ dont la dimension relative est n. Ici X et Y désignent des variétés complexes non singulières. On suppose que X admet une métrique kählérienne, et que p est une submersion. Soit également un fibré en droites $(L, h_L) \to X$ muni d'une métrique h_L non singulière dont la forme de courbure est semi-positive.

On défini le *fibré canonique relatif* associé à p comme suit

$$K_{X/Y} := K_X - p^\star(K_Y); \tag{15}$$

c'est un objet central dans l'étude de la géométrie de p. Soit

$$\mathscr{F} := p_\star(K_{X/Y} + L) \tag{16}$$

l'image directe du fibré canonique relatif tensorisé par L. Alors $\mathscr{F}$ est un fibré vectoriel holomorphe, qu'on peut munir de la métrique suivante

$$\langle u, v\rangle_y := c_n \int_{X_y} u \wedge \overline{v} e^{-\varphi_L} \tag{17}$$

où $u, v \in \mathscr{F}_y = H^0(X_y, K_{X_y} + L)$ sont des $(n, 0)$-formes à valeurs dans $L|_{X_y}$, et où c_n est la constante unimodulaire habituelle.

Dans ce contexte, Berndtsson a établi le résultat suivant.

THÉORÈME 1.7 ([**4**]). — *Le fibré hermitien image directe* $(\mathscr{F}, \|\cdot\|)$ *est positif au sens de Nakano.*

On voit aisément la parenté entre les énoncés 1.4 et 1.7, respectivement. La condition de pseudoconvexité de $\mathscr{D}$ est remplacée par l'hypothèse « X est kählérienne », et la fonction psh φ devient la métrique h_L. L'espace des fonctions holomorphes A_t^2 correspond à l'espace des sections $H^0(X_y, K_{X_y} + L)$. On remarquera que, du coup, on n'a pas besoin de trouver un substitut pour la mesure de Lebesgue utilisée pour définir la norme dans (17).

Le théorème 1.7 a engendré beaucoup de résultats dans des domaines divers de l'analyse et de la géométrie complexe. Nous allons en présenter ici un certain nombre; *grosso modo*, on peut le classer en trois catégories comme suit.

1.1. Applications en analyse complexe

Il s'agit des articles [**9**], [**8**]. Parmi les résultats qui se trouvent dans ces ouvrages, nous avons choisi de présenter et commenter dans ce texte les deux théorèmes suivants.

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un ouvert contenant l'origine, et soit $\varphi \in \mathrm{Psh}(\Omega)$ une fonction psh. On considère l'ensemble

$$\Lambda := \{\lambda \in \mathbb{R}_+ : e^{-\lambda\varphi} \in L^1(\Omega, 0)\}; \tag{18}$$

autrement dit, Λ c'est l'ensemble des réels positifs λ tels que la fonction $e^{-\lambda\varphi}$ est localement intégrable au voisinage de l'origine.

Le résultat suivant a été conjecturé par Demailly-Kollár dans [**27**] et démontré par Berndtsson dans [**8**].

Théorème 1.8 ([**8**]). — *L'ensemble $\Lambda \subset \mathbb{R}_+$ est ouvert.*

Le cas de la dimension complexe deux de la conjecture de Demailly-Kollár a été établi auparavant par Favre-Jonsson, cf. [**31**], [**30**]. Peu après la publication de [**7**], Guan-Zhou ont obtenu une version beaucoup plus générale du théorème 1.8, cf. [**37**], [**36**]. Nous allons présenter l'argument de 1.8 qui a été « extrait » par Berndtsson de la preuve de Guan-Zhou, car c'est plus simple que la preuve originale et il est très élégant.

Un autre résultat – obtenu en collaboration avec L. Lempert – où le théorème 1.7 intervient de manière essentielle est la version « optimale » du célèbre théorème d'extension de Ohsawa-Takegoshi, dont voici le cas particulier qu'on va traiter ici.

Théorème 1.9 ([**12**], [**36**], [**9**]). — *Soit $p : X \to \mathbb{D}_r$ une submersion propre, où X est une variété kählérienne et $\mathbb{D}_r \subset \mathbb{C}$ est le disque de rayon r. Soit $L \to X$ un fibré en droites, muni d'une métrique singulière h_L dont le courant de courbure est positif, et dont la restriction à la fibre centrale $X_0 = p^{-1}(0)$ n'est pas identiquement $+\infty$. Soit u une section du fibré $K_{X_0} + L$, telle que $c_n \int_{X_0} u \wedge \overline{u} e^{-\varphi_L} < \infty$. Alors il existe une section U de $K_X + L$, telle que :*