Séminaire BOURBAKI Janvier 2017
69^e année, 2016–2017, n^o 1127, p. 213 à 266
doi:10.24033/ast.1065

INÉGALITÉS ISOPÉRIMÉTRIQUES DANS LES ESPACES MÉTRIQUES MESURÉS [d'après F. Cavalletti & A. Mondino]

par **Cédric VILLANI**

Hélas, on ne sait jamais quel problème est joli et quel problème est laid,
tant qu'on ne les a pas résolus.
M. GROMOV, "Sign and meaning of curvature" [**51**]

INTRODUCTION

Vers l'an 2000, le développement rapide de la théorie du transport optimal menait à la découverte de liens étroits entre courbure de Ricci, entropie de Boltzmann et transport de Monge-Kantorovich [**32, 78**]. À partir de cette observation, une théorie synthétique de la courbure de Ricci, basée sur les notions d'entropie et de transport optimal, entamait sa gestation dès 2004 [**66, 88**]. Les motivations étaient multiples : étendre à un cadre non lisse la théorie de la courbure de Ricci ; développer de nouvelles heuristiques et interprétations adaptées à certains problèmes d'analyse géométrique ou d'équations aux dérivées partielles ; en déduire de nouveaux théorèmes de géométrie riemannienne ; enfin, dégager des pistes pour des généralisations de la notion de courbure.

En 2008, le programme était suffisamment avancé pour faire l'objet d'un Séminaire Bourbaki rédigé par Michel Ledoux [**63**], et d'une partie importante de ma monographie [**90**]. La stabilité par topologie de Gromov-Hausdorff et l'adaptation de bon nombre d'inégalités géométriques classiques constituaient deux atouts de la nouvelle théorie. En revanche, comme le remarquait Ledoux, d'importantes interrogations subsistaient : parmi les problèmes ouverts recensés à l'époque, citons la compatibilité avec la théorie bien établie des espaces CAT (Cartan-Alexandrov-Toponogov) ou avec la théorie classique de l'analyse dans les espaces métriques, l'existence d'un semigroupe de la chaleur en courbure minorée, la localisation de la nouvelle notion de courbure, l'établissement d'inégalités géométriques optimales en dimension finie, ou encore des énoncés de rigidité.

Tous ces problèmes ont été résolus de façon satisfaisante entre 2010 et 2015 par une série de contributions marquantes [**5, 6, 7, 26, 36, 45, 80, 81**]. Parmi ces avancées majeures, la plus récente, due à Cavalletti & Mondino [**24, 26**] revêt une importance particulière, car elle permet d'intégrer dans la théorie des inégalités emblématiques qui étaient jusque là restées hors de portée. Elle repose sur une magnifique idée de Klartag [**61**] qui établit un pont inattendu entre les méthodes de la géométrie des convexes et celles du transport optimal.

Grâce à ces travaux, on peut pour la première fois proposer une démonstration synthétique, « raisonnable », de la célèbre inégalité isopérimétrique de Lévy-Gromov. Les preuves connues auparavant utilisaient des résultats fins d'analyse, très gourmands en hypothèses de régularité et obtenus par une orgie technique ; par contraste, la nouvelle démonstration ne demandera aucune régularité au-delà du non-branchement des géodésiques. La mise au point d'une preuve aussi générale était en fait une motivation forte du programme de la courbure de Ricci dans les espaces non lisses.

Par construction, l'inégalité de Lévy-Gromov implique des constantes optimales en fonction de la dimension ; parvenir à une telle optimalité est parfois un but en soi, parfois plutôt un test pour la puissance des méthodes. De fait, les mêmes techniques ont permis à Cavalletti & Mondino de traiter un grand nombre d'inégalités à constantes optimales, résolvant cinq ou six problèmes ouverts de [**90**] et amenant la théorie dans un état de maturité qui semblait inaccessible encore récemment.

Dans cet exposé, je commencerai par énoncer l'inégalité de Lévy-Gromov et rappeler sa démonstration classique dans les variétés riemanniennes (section 1). Puis je présenterai l'état de l'art concernant les bornes de courbure de Ricci dans les espaces métriques mesurés, et en particulier le cadre des « espaces $\mathrm{CD}^*(K,N)$ essentiellement non branchants » qui est celui où se place naturellement la nouvelle démonstration de Cavalletti-Mondino (section 2). La section 3 sera consacrée à une difficulté majeure dans l'obtention d'inégalités optimales ; ce sont les résultats des sections 4 et 5 qui permettront d'y répondre, à travers une étude qualitative fine du transport optimal. La section 6 démontrera le résultat principal, l'inégalité de Lévy-Gromov dans des espaces métriques mesurés (théorème 6.1) ; la section 7 sera consacrée aux cas d'optimalité et la section 8 à d'autres applications de la méthode. Enfin on passera en revue quelques conclusions et perspectives de recherche dans la section 9.

Je remercie chaleureusement Fabio Cavalletti, Nicola Gigli, Michel Ledoux, John Lott, Emanuel Milman et Andrea Mondino pour leur relecture de cet exposé et leurs précieux conseils. Le texte a été revu et corrigé à l'occasion d'un cours organisé à l'Institut Camille Jordan (Université de Lyon Claude Bernard) par Ivan Gentil.

Notation

J'utiliserai la convention $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$. Dans tout cet exposé, dès qu'une métrique riemannienne sera définie ou sous-jacente, je noterai sans plus de précisions d pour la distance géodésique associée, vol pour le volume riemannien, Ric pour la courbure de Ricci (qui est une forme quadratique définie sur le fibré tangent), ∇ pour l'opérateur gradient, Δ pour l'opérateur laplacien (divergence du gradient), ∇^2 pour l'opérateur hessien. Un ensemble A étant donné, je noterai $A^\varepsilon = \{x;\ d(x, A) \leq \varepsilon\}$ l'élargissement de A par une distance $\varepsilon \geq 0$; et $B_r(x)$ sera la boule ouverte de centre x et de rayon r. Je noterai aussi $\mathbb{E}^n$ l'espace euclidien de dimension n, et $\mathbb{S}^n(R) \subset \mathbb{E}^{n+1}$ la sphère standard à n dimensions de rayon R. Enfin, les variétés seront toujours supposées connexes et complètes, et les géodésiques seront supposées minimisantes et de vitesse constante (parfois unitaires, c'est-à-dire de vitesse normalisée à 1 ; et parfois pas).

1. COMPARAISON ISOPÉRIMÉTRIQUE DE LÉVY-GROMOV

C'est une estimation de Lévy [**64**, Partie 3, chapitre 4] qui fonda tout à la fois l'isopérimétrie non euclidienne et la théorie de la concentration de la mesure en grande dimension. Lévy considérait des hypersurfaces plongées de courbures sectionnelles uniformément positives ; autrement dit, des bords d'ouverts lisses uniformément convexes. Il montrait que dans une telle hypersurface, les inégalités isopérimétriques sont « au moins aussi fortes » que dans une sphère.

La date de la découverte de Lévy est incertaine (quelque part entre l'édition de 1919 et celle de 1951 de son ouvrage d'analyse fonctionnelle) ; c'est V. Milman qui en fit une promotion vigoureuse dans les années 1970. Gromov [**50**] apporta trois contributions majeures au sujet : il montra par diverses applications la puissance de l'inégalité de Lévy ; il répara la preuve originale, qui achoppait sur des problèmes considérables de régularité ; enfin il généralisa l'estimation à toute variété riemannienne de courbure de Ricci uniformément positive.

Cette dernière évolution était en ligne avec deux principes généraux : d'une part, la courbure de Ricci est la courbure naturelle dans les questions qui font intervenir à la fois mesures et distances ; d'autre part, dans de nombreux énoncés, les bornes inférieures sur la courbure sectionnelle peuvent être remplacées par des bornes inférieures sur la courbure de Ricci (penser aux théorèmes de Bonnet-Myers, Lichnérowicz, Bishop-Gromov, Li-Yau, etc.). On rappelle que la courbure de Ricci au point $x \in M$, dans une direction tangente unitaire e, coïncide avec la somme des courbures sectionnelles dans les $n-1$ plans engendrés par les paires (e, e_i), si $(e, e_2, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de l'espace tangent T_xM ; de sorte que la minoration de la courbure de Ricci est une hypothèse plus faible que la minoration des courbures sectionnelles.

THÉORÈME 1.1 (inégalité isopérimétrique de Lévy-Gromov, [**50**])

Soit (M, g) *une variété riemannienne lisse de dimension* $n > 1$*, de courbure de Ricci uniformément positive :* $\mathrm{Ric} \geq K\, g$*, où* $K > 0$ *est une constante ; on rappelle qu'alors* M *est forcément compacte. Soit* A *une partie mesurable de* M *; on note* $\nu[A]$ *son volume riemannien normalisé, et* $\nu^+[\partial A]$ *sa mesure de surface au sens de Minkowski, également normalisée :*

$$\nu[A] = \frac{\mathrm{vol}\,[A]}{\mathrm{vol}\,[M]}, \qquad \nu^+[\partial A] = \liminf_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\nu[A^\varepsilon \setminus A]}{\varepsilon}.$$

Soit par ailleurs $S = S^{K,n} = \mathbb{S}^n(\sqrt{(n-1)/K})$ *la sphère de dimension* n *et de rayon* $\sqrt{(n-1)/K}$*, équipée de son volume normalisé* σ*. Soit enfin* B *une boule dans* S*, c'est-à-dire une calotte sphérique. Alors*

$$\nu[A] = \sigma[B] \quad \Longrightarrow \quad \nu^+[\partial A] \geq \sigma^+[\partial B]. \tag{1}$$

En d'autres termes, si l'on définit sur $[0,1]$ *le profil isopérimétrique normalisé*

$$\mathscr{I}_M(\alpha) = \inf\left\{\nu^+[\partial A]; \quad \nu[A] = \alpha\right\}, \tag{2}$$

alors $\mathscr{I}_M \geq \mathscr{I}_S$*. De façon équivalente, si l'on pose, sur* $[0,1] \times \mathbb{R}_+$*,*

$$\Phi_M(\alpha; \varepsilon) = \inf\left\{\nu[A^\varepsilon];\ \nu[A] = \alpha\right\}, \tag{3}$$

alors $\Phi_M \geq \Phi_S$*.*

Remarque 1.2. — J'emploie la notation $\nu^+[\partial A]$ car la définition induit effectivement une notion de « mesure de bord » ν^+ sur ∂A ; mais c'est un abus de notation. En effet, si A est trop irrégulier, ν^+ peut ne pas dépendre uniquement de ∂A, mais aussi de tout l'ensemble A. (Penser au cas où A est dénombrable dense dans M : alors $\nu^+[\partial A] = \infty$ et $\nu^+[\partial(M \setminus A)] = 0$, bien que $\partial A = \partial(M \setminus A) = M$.)

Remarque 1.3. — Le théorème 1.1 s'inscrit dans la riche tradition des énoncés par comparaison, où l'espace est comparé à une géométrie de référence, en l'occurrence une sphère. La plupart de ces résultats reposent *in fine* sur la comparaison de solutions d'équations différentielles d'ordre 2, et l'inégalité de Lévy-Gromov ne déroge pas à cette habitude.

Remarque 1.4. — Pour combiner, comme le fait le théorème 1.1, une hypothèse de courbure et une hypothèse de dimension, on peut utiliser la *condition de courbure-dimension*, qui s'est imposée en théorie de la courbure de Ricci, au carrefour entre analyse, probabilité et géométrie. Moralement, elle exprime à la fois la minoration de la courbure et la majoration de la dimension. Dans la suite, j'utiliserai pour cette condition la notation classique $\mathrm{CD}(K, N)$, où $K \in \mathbb{R}$ et $N \in [1, \infty]$ (pas forcément entier). On dit qu'une variété riemannienne (M^n, g), munie d'une mesure de référence lisse $\nu(dx) = e^{-V(x)}\,\mathrm{vol}\,(dx)$, vérifie la condition de courbure-dimension $\mathrm{CD}(K,N)$ si

$$n \le N, \qquad \mathrm{Ric} + \nabla^2 V - \frac{\nabla V \otimes \nabla V}{N-n} \ge Kg. \tag{4}$$

(Implicitement $n < N$ si $\nabla V \neq 0$.) Quand ν est la mesure de volume normalisé, la seconde inégalité se réduit à $\mathrm{Ric} \ge Kg$; mais on est souvent amené à considérer d'autres mesures. L'inégalité (4) peut se ré-exprimer par de nombreuses conditions équivalentes [**90**, chapitre 14], dont les deux plus populaires sont

(a) l'inégalité de Bochner : pour toute fonction f lisse sur M,

$$L\Big(\frac{|\nabla f|^2}{2}\Big) - \nabla f \cdot \nabla L f \ge K|\nabla f|^2 + \frac{(Lf)^2}{N}, \qquad Lf = \Delta f - \nabla V \cdot \nabla f; \tag{5}$$

(b) l'inégalité de déterminant jacobien de l'exponentielle : soient ψ une fonction lisse sur M, et $\gamma(x,t) = \exp_x(t\nabla\psi(x))$ le flot de géodésiques déterminé par le champ de vitesses $\nabla\psi$; soit $\mathcal{J}(x,t) = e^{-V(\gamma(x,t))+V(x)}\det(d_x\gamma(x,t))$ la distortion infinitésimale de la mesure associée à $x \longmapsto \gamma(x,t)$; alors $\ell(x,t) := -\log \mathcal{J}(x,t)$ vérifie, tant que $t > 0$ reste assez petit pour que $\ell(x,t)$ soit bien défini,

$$\ddot{\ell} \ge K|\dot\gamma|^2 + \frac{(\dot\ell)^2}{N}. \tag{6}$$

Si $N = \infty$, cette inégalité différentielle est linéaire ; si $N < \infty$ elle peut se réécrire sous une forme linéaire, modulo un changement de fonction :

$$\mathcal{D} := \mathcal{J}^{\frac{1}{N}} \Longrightarrow \qquad \ddot{\mathcal{D}} + \left(\frac{K|\dot\gamma|^2}{N}\right)\mathcal{D} \le 0. \tag{7}$$

L'équivalence entre (5) et (6) est une manifestation de la dualité entre points de vue eulérien et lagrangien ; l'une ou l'autre de ces inégalités peut se prouver avec le formalisme des champs de Jacobi [**90**, chapitre 14]. Les conditions $\mathrm{CD}(K,N)$ fournissent un cadre naturel à toutes sortes d'inégalités fonctionnelles et géométriques, comme on le voit par exemple dans l'ouvrage de synthèse de Bakry, Gentil et Ledoux [**13**].

Remarque 1.5. — Le théorème 1.1 fait usage de la sphère comme espace de référence en courbure strictement positive ; d'autres géométries de référence classiques sont, bien entendu, l'espace euclidien (courbure nulle) et l'espace hyperbolique (courbure strictement négative). Chacun de ces espaces correspond à une valeur $N \in \mathbb{N}$, et est équipé de sa mesure volume. Il existe une autre famille d'espaces de référence qui ont un sens pour toute valeur de $N \in [1,\infty]$ (sauf $N = 1$ et $K \neq 0$) ; ces espaces $X^{K,N}$ sont obtenus en considérant la droite réelle, munie de sa structure euclidienne habituelle, et d'une mesure qui n'est pas forcément celle de Lebesgue : $X^{K,N} = (\mathbb{E}^1, v(x)\,dx)$, où $v(x) = \cos^{N-1}(\lambda x)\,1_{|x|<\pi/(2\lambda)}$, $\lambda = \sqrt{K/(N-1)}$, quand $K/(N-1) > 0$; $v(x) = \cosh^{N-1}(\lambda x)$ $\lambda = \sqrt{|K|/(N-1)}$, quand $K/(N-1) < 0$;