Séminaire BOURBAKI Mars 2017
69e année, 2016–2017, no 1128, p. 267 à 296
doi:10.24033/ast.1066

LE PROBLÈME DE RIEMANN-HILBERT DANS LE CAS IRRÉGULIER
[d'après des travaux de D'Agnolo, Kashiwara, Mochizuki et Schapira]

par **Stéphane GUILLERMOU**

INTRODUCTION

Le nom « problème de Riemann-Hilbert » fait référence au vingt-et-unième problème proposé par Hilbert au Congrès international de Paris en 1900 : « Prouver qu'il existe toujours une équation différentielle linéaire de la classe de Fuchs avec des singularités et un groupe de monodromie donnés. » Il s'agissait d'équations différentielles linéaires sur $\mathbb{C}$ ou sur une surface de Riemann. On peut avoir en tête l'exemple très simple $x\partial_x - \alpha$, pour $\alpha \in \mathbb{C}$, dont les zéros sont les multiples de x^α. Quand on parcourt un lacet simple autour de 0 et qu'on étend une solution par prolongement analytique, après un tour on retrouve la même solution multipliée par $\exp(2i\pi\alpha)$. Cet opérateur de multiplication par $\exp(2i\pi\alpha)$ s'appelle la *monodromie*. On peut regarder plus généralement une équation d'ordre n ou un système $y'(x) = A(x)y(x)$ où $A(x)$ est une fonction méromorphe à valeurs dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$. Là encore l'ensemble des solutions holomorphes forme un faisceau localement constant sur la surface privée des pôles de A, avec une monodromie à valeurs dans $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$. La question est donc de trouver A à partir de ce faisceau. La classe de Fuchs correspond au cas où A n'a que des pôles simples (on utilise aussi l'expression « à singularités régulières »). Pour des détails sur cette question en dimension 1 nous renvoyons à **[1]**.

Dans cet exposé nous allons voir que le problème de Riemann-Hilbert sur une variété analytique complexe X de dimension quelconque a une réponse positive, bien sûr après avoir précisé quel type (de systèmes) d'équations différentielles et quel type de solutions on considère. Nous verrons que la généralisation naturelle d'une équation différentielle ordinaire linéaire est donnée par la notion de *$\mathscr{D}_X$-module holonome*. Le cas à singularités régulières correspond aux $\mathscr{D}_X$-modules holonomes *réguliers*. Dans **[6]** Kashiwara montre que les solutions holomorphes d'un $\mathscr{D}_X$-module holonome forment un faisceau $\mathbb{C}$-constructible. Il conjecture (voir **[27]** p. 287) que le foncteur qui à un $\mathscr{D}_X$-module associe ses solutions holomorphes induit une équivalence entre $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hr}}(\mathscr{D}_X)$ et $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-c}}(\mathbb{C}_X)$, où $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hr}}(\mathscr{D}_X)$ désigne la catégorie dérivée bornée des complexes de $\mathscr{D}_X$-modules à cohomologie holonome régulière et $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-c}}(\mathbb{C}_X)$ la catégorie dérivée bornée des complexes de faisceaux à cohomologie $\mathbb{C}$-constructible. Dans **[7, 8]** Kashiwara prouve cette équivalence en construisant un foncteur inverse au foncteur solution (voir aussi **[23]** pour une autre approche par Mebkhout).

Le cas des modules holonomes quelconques a été résolu récemment. La construction de l'inverse se généralise à des outils plus précis (faisceaux sous-analytiques de fonctions holomorphes tempérées) introduits par Kashiwara-Schapira **[15]** et utilisés par D'Agnolo-Kashiwara **[4]**. Le résultat de **[4]** dit que le foncteur qui envoie un module holonome sur ses solutions holomorphes *renforcées* est pleinement fidèle. Un article de Mochizuki **[26]** décrit l'image de ce foncteur.

Nous introduisons ici les notions qui permettent d'énoncer les résultats de **[4]** et nous donnons très grossièrement le schéma de la preuve. Pour un exposé plus précis on peut consulter **[10]**. Pour un exposé beaucoup plus détaillé mais quand même assez court nous renvoyons au livre **[18]**.

$\mathscr{D}$-modules – solutions. — Nous précisons maintenant ce qu'on entend par « système d'équations » ($\mathscr{D}$-module) et « solution holomorphe ». En dimension 1 on voit que la réponse au problème de Riemann-Hilbert dépend de la façon dont on veut représenter le système différentiel. La méthode la plus intrinsèque est probablement d'associer à un système d'EDP linéaires à coefficients holomorphes un $\mathscr{D}$-module. Nous expliquons rapidement ce que cela signifie. Par la suite nous ne considérerons plus que des $\mathscr{D}$-modules. Soit X une variété analytique complexe. Nous notons $\mathscr{O}_X$ le faisceau des fonctions holomorphes sur X et $\mathscr{D}_X$ le faisceau des opérateurs différentiels linéaires à coefficients holomorphes. C'est un faisceau d'anneaux (le produit est la composition). Un $\mathscr{D}_X$-module $\mathscr{M}$ est un faisceau de modules à gauche sur $\mathscr{D}_X$. Soit U un ouvert de X et P un système d'EDP linéaires holomorphes sur U à N_0 inconnues et N_1 équations. Autrement dit P est une matrice $N_0 \times N_1$ à coefficients dans $\mathscr{D}_X(U)$. On définit le $\mathscr{D}_U$-module $\mathscr{M} = \mathscr{D}_U^{N_0}/\mathscr{D}_U^{N_1} \cdot P$; on a donc la présentation finie

$$\mathscr{D}_U^{N_1} \xrightarrow{\cdot P} \mathscr{D}_U^{N_0} \to \mathscr{M} \to 0. \tag{1}$$

Si $\mathscr{F}$ est un faisceau de fonctions sur lequel les opérateurs différentiels agissent, $\mathscr{F} = \mathscr{O}_X$ ou $\mathscr{F} = \mathscr{C}_X^\infty$, le faisceau des fonctions $\mathscr{C}^\infty$, etc., la donnée de N_0 fonctions inconnues dans $\mathscr{F}$ est la même chose que la donnée d'un morphisme $\mathscr{D}$-linéaire $\varphi\colon \mathscr{D}_U^{N_0} \to \mathscr{F}|_U$. Ces inconnues sont solutions de P si et seulement si φ se factorise par $\mathscr{M}$. Ainsi $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}_U}(\mathscr{M}, \mathscr{F}|_U)$ s'identifie aux solutions de P dans $\mathscr{F}$ au-dessus de U. Soient P' un autre système donné sur U et $\mathscr{M}'$ le $\mathscr{D}_U$-module correspondant, comme en (1). Si on a un isomorphisme de $\mathscr{D}_U$-modules $\mathscr{M} \simeq \mathscr{M}'$ on voit que P et P' ont des espaces de solutions isomorphes dans tout faisceau de fonctions $\mathscr{F}$ donné. Il est donc naturel de considérer des systèmes comme équivalents si les $\mathscr{D}$-modules associés sont isomorphes. Dans la suite nous ne considérons plus des systèmes mais seulement des $\mathscr{D}_X$-modules qui admettent une présentation du type (1) au voisinage de chaque point de X. De tels $\mathscr{D}$-modules sont dits *cohérents*.

Comme on vient de le voir l'ensemble des solutions holomorphes d'un $\mathscr{D}_X$-module $\mathscr{M}$ correspond au groupe $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}, \mathscr{O}_X)$. Il faut prendre garde que ce groupe ne vient pas avec un plongement donné dans les fonctions holomorphes et qu'il n'a pas d'autre structure que celle d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Pour en tirer une information de type monodromie, il faut considérer le faisceau de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels $U \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}_U}(\mathscr{M}|_U, \mathscr{F}|_U)$. Dans ce cadre il est utile de pouvoir faire des dévissages sur $\mathscr{M}$ et on voit tout de suite apparaître les extensions. On définit donc plutôt les solutions en utilisant le faisceau $\mathscr{H}om$ interne dérivé :

$$\mathscr{S}ol_X(\mathscr{M}) = \mathrm{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}, \mathscr{O}_X). \tag{2}$$

Ainsi $\mathscr{S}ol_X(\mathscr{M})$ est un objet de $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_X)$, la catégorie dérivée bornée des faisceaux de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sur X. Le problème de Riemann-Hilbert devient alors (provisoirement) : quels sont les $F \in \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_X)$ qui sont du type $F = \mathscr{S}ol_X(\mathscr{M})$? Une question liée à celle-ci est de savoir si $\mathscr{S}ol_X(\mathscr{M})$ détermine $\mathscr{M}$? Avant de donner une formulation définitive du problème nous allons restreindre les classes de $\mathscr{D}$-modules et de faisceaux considérés.

Modules holonomes. — En dimension 1 le faisceau des solutions holomorphes d'un opérateur non nul a des germes de dimensions finies. En dimension plus grande ce n'est en général pas le cas mais il existe une classe de $\mathscr{D}$-modules qui ont cette propriété. Si un $\mathscr{D}_X$-module $\mathscr{M}$ correspond à un système avec beaucoup d'équations on peut s'attendre à ce qu'il ait peu de solutions. Ceci peut se voir sur la *variété caractéristique* $\mathrm{car}(\mathscr{M}) \subset T^*X$ (voir §1). C'est une sous-variété analytique complexe de T^*X. Un théorème de Kashiwara dit que, si $\mathscr{M} \neq 0$, alors $\mathrm{car}(\mathscr{M})$ est de dimension au moins $\dim X$. Un $\mathscr{D}_X$-module cohérent $\mathscr{M}$ est dit *holonome* si $\mathscr{M} = 0$ ou $\mathrm{car}(\mathscr{M})$ est de dimension $\dim X$. Un autre résultat de Kashiwara dit que, si $\mathscr{M}$ est holonome, alors $\mathscr{S}ol_X(\mathscr{M})$ est un objet $\mathbb{C}$-constructible de $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_X)$ dans le sens où il existe une stratification analytique complexe de X telle que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, la restriction de $H^k(\mathscr{S}ol_X(\mathscr{M}))$ à chaque strate est localement constante de rang fini. Plus précisément $\mathscr{S}ol_X(\mathscr{M})$ est un *faisceau pervers* à décalage près, en particulier $H^k(\mathscr{S}ol_X(\mathscr{M}))$ a un support de dimension plus petite que $n-k$.

On peut déjà donner une réponse partielle au problème de Riemann-Hilbert. Notons $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathscr{D}_X)$ la catégorie dérivée bornée des $\mathscr{D}_X$-modules et $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{h}}(\mathscr{D}_X)$ la sous-catégorie des $\mathscr{M}$ tels que $H^i(\mathscr{M})$ est holonome pour tout $i \in \mathbb{Z}$. La définition (2) s'étend à $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathscr{D}_X)$. Alors tout objet $\mathbb{C}$-constructible de $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_X)$ est isomorphe à $\mathscr{S}ol_X(\mathscr{M})$

pour un certain $\mathcal{M} \in \mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{h}}(\mathcal{D}_X)$. Cependant deux $\mathcal{D}_X$-modules holonomes peuvent avoir les mêmes solutions. Cette remarque vaut déjà en dimension 1 mais là on sait que les équations à singularités régulières sont déterminées par leur solutions.

Correspondance de Riemann-Hilbert – cas régulier. — Il y a une notion de $\mathcal{D}$-module holonome régulier en toute dimension étendant la notion d'opérateur à singularité régulière – voir la définition 3.2 ci-dessous. Notons $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hr}}(\mathcal{D}_X)$ la sous-catégorie de $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{D}_X)$ des complexes de $\mathcal{D}_X$-modules à cohomologie holonome régulière. De même notons $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-c}}(\mathbb{C}_X)$ la sous-catégorie de $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_X)$ des complexes à cohomologie $\mathbb{C}$-constructible. Alors la correspondance de Riemann-Hilbert dans le cas régulier s'énonce ainsi : le foncteur $\mathcal{S}ol_X(\cdot)$ induit une équivalence de catégories entre $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hr}}(\mathcal{D}_X)$ et $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-c}}(\mathbb{C}_X)$. Comme on l'a dit plus haut Kashiwara construit un foncteur inverse. Notons $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{R}\text{-c}}(\mathbb{C}_X)$ la catégorie des complexes à cohomologie constructible pour une stratification sous-analytique réelle. Kashiwara construit un foncteur contravariant « homomorphismes tempérés » $T\mathcal{H}om(\cdot, \mathcal{O}_X) \colon \mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{R}\text{-c}}(\mathbb{C}_X) \to \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{D}_X)$ et montre que sa restriction à $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-c}}(\mathbb{C}_X)$ arrive dans $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hr}}(\mathcal{D}_X)$ et fournit un inverse à la restriction de $\mathcal{S}ol_X(\cdot)$ à $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hr}}(\mathcal{D}_X)$.

De plus, par des résultats antérieurs de Kashiwara, on peut voir que cette correspondance identifie les faisceaux pervers, sous-catégorie abélienne de $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-c}}(\mathbb{C}_X)$, aux $\mathcal{D}_X$-modules holonomes réguliers (vus comme complexes concentrés en degré 0).

Cas irrégulier. — Le résultat précédent nous dit donc que les systèmes holonomes réguliers sont déterminés par des données de type topologique (des faisceaux constructibles). Les travaux récents mentionnés auparavant permettent une description comparable des systèmes holonomes quelconques. L'exemple 2.5 nous dit qu'il ne suffit pas de regarder les solutions holomorphes. D'autre part il est connu que les solutions des systèmes réguliers ou irréguliers ont des propriétés de convergence ou de croissance différentes. Par exemple, très grossièrement, les solutions formelles d'un système régulier convergent. Une première idée, approfondie dans **[14]** et **[15]**, est de considérer des solutions holomorphes avec conditions de croissance au bord. Le problème essentiel est qu'on veut faire cela en gardant les aspects faisceautiques. Ce problème est résolu dans **[15]**, où Kashiwara et Schapira étudient la catégorie des *ind-faisceaux*, qui sont des ind-objets de la catégorie des faisceaux à support compact, et introduisent en particulier un ind-faisceau de « fonctions holomorphes tempérées ». Ils peuvent alors considérer le ind-faisceau $\mathcal{S}ol^{\mathrm{t}}_X$ de solutions à valeurs dans ce ind-faisceau. Ceci permet de reformuler de façon élégante le foncteur homomorphismes tempérés déjà construit par Kashiwara. Nous rappelons ces résultats dans le paragraphe 4 en utilisant le langage des faisceaux sous-analytiques, qui suffit pour exposer les résultats. Ces faisceaux sous-analytiques sont aussi introduits dans **[15]** pour construire les ind-faisceaux de fonctions tempérées. Le foncteur solution tempéré $\mathcal{S}ol^{\mathrm{t}}_X$ permet de distinguer plus de $\mathscr{D}$-modules holonomes que $\mathscr{S}ol_X$. Mais il manque encore une étape pour avoir la fidélité.

Il est possible de raffiner ces faisceaux de fonctions holomorphes tempérées en ajoutant une variable. Ceci est expliqué dans [**4**]. D'Agnolo et Kashiwara définissent une catégorie de ind-faisceaux *renforcés*, $\mathsf{E}^{\mathrm{b}}(\mathrm{I}\mathbb{C}_X)$, un ind-faisceau renforcé de fonctions holomorphes tempérées, $\mathscr{O}_X^{\mathrm{E}}$, et un foncteur solution correspondant, $\mathscr{S}ol_X^{\mathrm{E}}$, qui va de $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathscr{D}_X)$ vers $\mathsf{E}^{\mathrm{b}}(\mathrm{I}\mathbb{C}_X)$. En utilisant des résultats de Mochizuki et Kedlaya sur la structure locale des connexions holomorphes intégrables ils montrent que ce dernier foncteur solution est pleinement fidèle. Plus précisément ils étendent la preuve de Kashiwara du cas régulier, reformulée dans le langage des ind-faisceaux, au cas général. L'analogue du foncteur homomorphismes tempérés devient $\mathscr{H}om^{\mathrm{E}}(\cdot, \mathscr{O}_X^{\mathrm{E}})\colon \mathsf{E}^{\mathrm{b}}(\mathrm{I}\mathbb{C}_X) \to \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathscr{D}_X)$. Ils montrent que si $\mathscr{M}$ est un $\mathscr{D}_X$-module holonome, alors $\mathscr{M} \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}om^{\mathrm{E}}(\mathscr{S}ol_X^{\mathrm{E}}(\mathscr{M}), \mathscr{O}_X^{\mathrm{E}})$.

Il reste encore à décrire l'image de $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{h}}(\mathscr{D}_X)$ par $\mathscr{S}ol_X^{\mathrm{E}}$ et en particulier l'image des complexes en degré 0. Dans [**4**] on trouve une notion d'objet constructible réel de $\mathsf{E}^{\mathrm{b}}(\mathrm{I}\mathbb{C}_X)$. Pour un $\mathscr{D}_X$-module holonome $\mathscr{S}ol_X^{\mathrm{E}}(\mathscr{M})$ est $\mathbb{R}$-constructible. Mais la sous-catégorie des $\mathbb{R}$-constructibles, $\mathsf{E}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{R}\text{-c}}(\mathrm{I}\mathbb{C}_X)$, est plus grande que l'image de $\mathscr{S}ol_X^{\mathrm{E}}$. Il n'y a pas de notion évidente d'objet $\mathbb{C}$-constructible. Néanmoins Mochizuki donne une caractérisation de l'image de $\mathscr{S}ol_X^{\mathrm{E}}$ dans [**26**]. Il montre qu'un objet $F \in \mathsf{E}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{R}\text{-c}}(\mathrm{I}\mathbb{C}_X)$ est de la forme $F \simeq \mathscr{S}ol_X^{\mathrm{E}}(\mathscr{M})$ avec $\mathscr{M} \in \mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{h}}(\mathscr{D}_X)$ si et seulement si c'est vrai pour $\mathrm{E}\varphi^{-1}(F)$, pour toute application holomorphe $\varphi\colon \Delta \to X$ du disque dans X (ici $\mathrm{E}\varphi^{-1}$ désigne l'image inverse pour les ind-faisceaux renforcés). On est ainsi ramené au cas de la dimension 1 où la situation est comprise ; on peut décrire les $\mathscr{D}_\Delta$-modules holonomes par les structures de Stokes et en déduire leurs solutions dans $\mathscr{O}_\Delta^{\mathrm{E}}$.

Pour comprendre l'image des $\mathscr{D}$-modules (les complexes en degré 0) D'Agnolo et Kashiwara introduisent dans [**3**] une t-structure sur $\mathsf{E}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{R}\text{-c}}(\mathrm{I}\mathbb{C}_X)$ qui généralise la t-structure de perversité sur les $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{R}\text{-c}}(\mathbb{C}_X)$ (Kashiwara donne dans [**11**] une définition de t-structure très semblable à la définition usuelle, mais un peu plus générale, et équivalente à la notion de « slicing » introduite par Bridgeland dans [**2**]). En combinant aux résultats de Mochizuki on obtient ainsi une catégorie analogue à celle des faisceaux pervers dans ce cadre.

1. QUELQUES RAPPELS SUR LES $\mathscr{D}$-MODULES

Si M est une variété analytique réelle, on note $\mathbb{C}_M$ le faisceau constant de groupe $\mathbb{C}$ et $\mathrm{Mod}(\mathbb{C}_M)$ la catégorie des faisceaux de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels. On note $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_M)$ la catégorie dérivée bornée de $\mathrm{Mod}(\mathbb{C}_M)$. Ses objets sont les complexes bornés d'objets de $\mathrm{Mod}(\mathbb{C}_M)$ et les morphismes sont obtenus à partir des morphismes de complexes