

AVANCÉES CONCERNANT LES R -MATRICES
ET LEURS APPLICATIONS
[d'après Maulik-Okounkov, Kang-Kashiwara-Kim-Oh, . . .]

par David HERNANDEZ

INTRODUCTION

Les R -matrices sont les solutions de l'équation de Yang-Baxter. À l'origine de la théorie des groupes quantiques, elles peuvent être interprétées comme des opérateurs d'entrelacement. Très récemment, des avancées ont été réalisées indépendamment dans différentes directions. Maulik-Okounkov ont donné une approche géométrique des R -matrices avec de nouveaux outils de géométrie symplectique, les enveloppes stables. Kang-Kashiwara-Kim-Oh ont prouvé une conjecture de catégorification des algèbres amassées en s'appuyant de manière cruciale sur des R -matrices. Enfin, une meilleure compréhension de l'action des matrices de transfert issues de R -matrices a permis de démontrer plusieurs conjectures sur les systèmes intégrables quantiques associés.

L'équation de Yang-Baxter

$$\mathcal{R}_{12}(z)\mathcal{R}_{13}(zw)\mathcal{R}_{23}(w) = \mathcal{R}_{23}(w)\mathcal{R}_{13}(zw)\mathcal{R}_{12}(z)$$

porte sur une série de Laurent

$$\mathcal{R}(z) \in (\mathcal{A} \otimes \mathcal{A})((z))$$

à coefficients dans le carré tensoriel d'une algèbre \mathcal{A} qu'on supposera complexe. Ici on utilise la notation standard

$$\mathcal{R}_{12}(z) = \mathcal{R}(z) \otimes 1, \mathcal{R}_{23}(z) = 1 \otimes \mathcal{R}(z), \mathcal{R}_{13}(z) = (P \otimes \text{Id})(\mathcal{R}_{23}(z)),$$

avec P l'opérateur de symétrie tel que

$$P(x \otimes y) = y \otimes x.$$

(*) Soutenu partiellement par le Conseil Européen de la Recherche dans le cadre du programme de l'Union Européenne H2020 avec la Grant ERC 647353 QAffine.

Les termes de l'équation de Yang-Baxter sont ainsi des éléments de $(\mathcal{A}^{\otimes 3})((z, w))$. Une solution est appelée R -matrice, ou R -matrice affine dans la mesure où elle dépend d'un paramètre z , appelé lui-même paramètre spectral (ou affine).

Cette équation a pour origine la théorie des systèmes intégrables (quantiques). Elle a aussi été considérablement étudiée dans divers domaines, notamment en théorie des représentations et en topologie (on pourra se reporter aux exposés [64, 69]). La théorie des groupes quantiques a été conçue pour apporter une réponse au problème de la construction de telles R -matrices.

1. CONSTRUCTION ALGÈBRIQUE

1.1. Exemple fondamental

Commençons par l'exemple fondamental suivant pour l'algèbre $\mathcal{A} = \text{End}(V)$ avec V espace vectoriel complexe de dimension 2 de base \mathcal{B} . Pour $q \in \mathbb{C}^*$, on a la R -matrice écrite dans la base de $V \otimes V$ naturellement associée à \mathcal{B} :

$$(1) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{q^{-1}(z-1)}{z-q^{-2}} & \frac{1-q^{-2}}{z-q^{-2}} & 0 \\ 0 & \frac{z(1-q^{-2})}{z-q^{-2}} & \frac{q^{-1}(z-1)}{z-q^{-2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in (\text{End}(V^{\otimes 2}))((z)) \simeq (\mathcal{A}^{\otimes 2})((z)).$$

En considérant la matrice extraite (après avoir supprimé les premières et dernières lignes et colonnes), en posant $z = e^u$, $q = e^{h/2}$ et en prenant u et h proches de 0, on obtient la fameuse « R -matrice de Yang » :

$$(2) \quad \frac{1}{u+h} \begin{pmatrix} u & h \\ h & u \end{pmatrix}.$$

La R -matrice (1) est apparue historiquement en physique statistique dans le cadre de l'étude du modèle à 6 sommets introduit par Pauling (1935), qui permet notamment de décrire le cristal de la glace. L'étude de ce modèle est étroitement liée à celle d'un autre modèle, en physique statistique quantique, appelé modèle XXZ de Spin 1/2, dit de Heisenberg quantique (1928). Il modélise des chaînes de spins magnétiques quantiques ayant deux états classiques, haut ou bas.

Ces deux modèles, modèle à 6 sommets et modèle XXZ , figurent parmi les plus étudiés en physique statistique et quantique. Les structures mathématiques qui les sous-tendent sont très proches et font intervenir l'algèbre affine quantique $\mathcal{U}_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ associée à l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$. Cette algèbre possède une famille de représentations simples V de dimension 2 dites « représentations fondamentales ». La R -matrice (1)

est obtenue à partir de telles représentations. Mais la théorie des groupes quantiques en produit beaucoup d'autres, selon qu'on change l'algèbre de Lie \mathfrak{g} ou la représentation V . Elles correspondent à autant de systèmes quantiques.

1.2. R -matrices universelles

L'exemple présenté ci-dessus se généralise avec la procédure suivante pour construire de grandes familles de R -matrices. On suppose dans la suite que $q \in \mathbb{C}^*$ n'est pas une racine de 1. À une algèbre de Lie simple complexe de dimension finie \mathfrak{g} sont associées :

– d'une part l'algèbre de Kac-Moody affine $\hat{\mathfrak{g}} = \mathcal{L}(\mathfrak{g}) \oplus \mathbb{C}c$ (voir l'exposé [22, section 3.1]) définie comme l'extension centrale universelle de l'algèbre des lacets

$$\mathcal{L}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t^{\pm 1}]$$

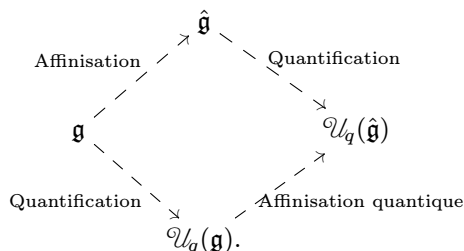
– d'autre part l'algèbre quantique $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ (le groupe quantique au sens de Drinfeld et Jimbo, voir l'exposé [64]) qui est une algèbre de Hopf et une q -déformation de l'algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

Lorsqu'on considère simultanément ces deux types de généralisations des algèbres de Lie, on obtient l'algèbre affine quantique $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$. Il s'agit d'une algèbre de Hopf, elle est notamment munie d'un coproduit, un morphisme d'algèbre

$$\Delta : \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}) \rightarrow \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}) \otimes \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$$

qui permet de définir une structure de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ -module sur le produit tensoriel de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ -modules.

Drinfeld [15] a démontré (preuve précisée par la suite par Beck [6] et Damiani [12]) que $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ peut non seulement être obtenue comme quantification de $\mathcal{U}(\hat{\mathfrak{g}})$, mais également, par un autre procédé, comme affinisaiton du groupe quantique $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$. Il s'agit de la réalisation de Drinfeld des algèbres affines quantiques. Ceci peut être vu de manière informelle sous la forme du diagramme commutatif suivant :



On dispose ainsi de deux présentations distinctes définissant des algèbres isomorphes (la présentation originelle de Drinfeld-Jimbo et la présentation de Drinfeld). Il s'agit

d'un analogue quantique d'un théorème classique de Kac et Moody pour les algèbres de Kac-Moody affines (voir [32, chapitre 7]).

La réalisation de Drinfeld permet de munir l'algèbre $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ d'une \mathbb{Z} -graduation naturelle. À cette graduation correspondent des automorphismes τ_a de l'algèbre $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ pour $a \in \mathbb{C}^*$, ainsi qu'un automorphisme τ_z de l'algèbre $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})(z)$ pour z une indéterminée, tels que pour $g \in \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ homogène de degré $m \in \mathbb{Z}$ on a :

$$\tau_a(g) = a^m g \text{ et } \tau_z(g) = z^m g.$$

THÉORÈME 1.1 (Drinfeld). — *L'algèbre $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ possède une R -matrice universelle, c'est-à-dire une solution non triviale de l'équation de Yang-Baxter dans le produit tensoriel complété*

$$\mathcal{R}(z) \in [\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}) \hat{\otimes} \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})][[z]].$$

De plus pour V et W représentations de dimension finie de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$, l'image

$$(\rho_V \otimes \rho_W)(\mathcal{R}(z)) = \mathcal{R}_{V,W}(z) \in (\text{End}(V) \otimes \text{End}(W))[[z]]$$

par les morphismes de représentation ρ_V et ρ_W est bien définie et

$$P \circ \mathcal{R}_{V,W}(z) : (V \otimes W)[[z]] \rightarrow (W \otimes V)[[z]]$$

est un morphisme de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ -module (P est l'opérateur de symétrie comme ci-dessus et l'action sur V est tordue par l'automorphisme τ_z).

Enfin on a les relations

$$(3) \quad (\text{Id} \otimes \Delta)(\mathcal{R}(z)) = \mathcal{R}_{13}(z)\mathcal{R}_{12}(z) \text{ et } (\Delta \otimes \text{Id})(\mathcal{R}(z)) = \mathcal{R}_{13}(z)\mathcal{R}_{23}(z).$$

On obtient ainsi des opérateurs d'entrelacement. Lorsque $V = W$, $\mathcal{R}_{V,V}(z)$ est une R -matrice.

Remarque 1.2. — La notion de produit tensoriel complété $\hat{\otimes}$ mentionnée ci-dessus est définie en utilisant certaines filtrations de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$. Nous ne précisons pas davantage car cette notion n'intervient que pour les R -matrices universelles et pas pour les R -matrices $\mathcal{R}_{V,W}(z)$ (ni pour les matrices de transfert) étudiées dans la suite de l'exposé.

Remarque 1.3. — Les conventions sur la \mathbb{Z} -graduation de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ évoquée ci-dessus font que $\mathcal{R}(z)$ ne fait effectivement intervenir que des puissances positives de z .

Preuve (esquisse). — La preuve de Drinfeld repose sur la réalisation de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ comme quotient du double d'une sous-algèbre de Hopf (analogue d'une sous-algèbre de Borel). Le double $D(A)$ d'une algèbre de Hopf A est l'espace vectoriel $A \otimes A^0$ avec A^0 l'algèbre de Hopf duale de A . $D(A)$ est alors muni d'une structure d'algèbre de Hopf qui possède automatiquement une R -matrice universelle (voir l'exposé [64, section 3]). \square

1.3. R -matrices normalisées

On a la propriété de rationalité suivante.

PROPOSITION 1.4. — *Pour V et W des représentations simples de dimension finie de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$, il existe une série de Laurent scalaire, $f_{V,W}(z) \in \mathbb{C}((z))$, telle que le produit*

$$f_{V,W}(z)\mathcal{R}_{V,W}(z) \in (\text{End}(V \otimes W))(z)$$

est une fonction rationnelle de z .

Preuve (esquisse). — On peut par exemple utiliser l'argument de [16, section 9.2] (voir aussi [26]). Soient v, w des vecteurs de plus haut poids respectivement de V et de W (relativement à un analogue d'une sous-algèbre de Cartan dans $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$). Il existe alors une unique $f_{V,W}(z) \in \mathbb{C}[[z]]$ telle que

$$(4) \quad (f_{V,W}(z)\mathcal{R}_{V,W}(z)) \cdot (v \otimes w) = v \otimes w.$$

La représentation $(V \otimes W) \otimes \mathbb{C}((z))$ de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})((z))$ est simple (c'est ce qu'on appelle la simplicité générique du produit tensoriel). Ainsi le fait que $f_{V,W}(z)P \circ \mathcal{R}_{V,W}(z)$ est un opérateur d'entrelacement se traduit par un système d'équations linéaires dont les solutions sont rationnelles. \square

Remarque 1.5. — On obtient l'unicité de la série de Laurent $f_{V,W}(z)$ en imposant la relation (4). C'est ce que nous ferons par la suite. Le morphisme rationnel $f_{V,W}(z)\mathcal{R}_{V,W}(z)$ admet un inverse qui est alors

$$(f_{V,W}(z)\mathcal{R}_{V,W}(z))^{-1} = f_{W,V}(z^{-1})(P \circ \mathcal{R}_{W,V}(z^{-1}) \circ P).$$

Nous nous intéresserons particulièrement au cas des représentations fondamentales $V_i(a)$ de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$. Elles sont paramétrées par $i \in \{1, \dots, n\}$ et $a \in \mathbb{C}^*$ où n est le rang de \mathfrak{g} . On pourra se reporter à [10, chapitre 12.2] pour des généralités sur les représentations de dimension finie de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$.

Soit $R \geq 0$ l'ordre de 1 comme pôle de $f_{V,W}(z)\mathcal{R}_{V,W}(z)$. Alors la limite

$$(5) \quad \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)^R f_{V,W}(z)P \circ \mathcal{R}_{V,W}(z)] : V \otimes W \rightarrow W \otimes V$$

est un morphisme de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ -module non nul (si V et W ne le sont pas).

DÉFINITION 1.6. — *La limite (5) est appelée R -matrice normalisée et notée*

$$\mathcal{R}_{V,W}^{\text{norm}} : V \otimes W \rightarrow W \otimes V.$$