Séminaire BOURBAKI Juin 2017
69e année, 2016–2017, nº 1132, p. 423 à 454
doi:10.24033/ast.1070

VARIÉTÉS EN EXPANSION
[d'après M. Gromov, L. Guth, ...]

par **Nicolas BERGERON**

INTRODUCTION

Soit $M = \Gamma\backslash\mathbf{H}_d$ une variété hyperbolique compacte de dimension d, où Γ est un sous-groupe discret et sans torsion du groupe $\mathrm{SO}_0(d,1)$ des isométries de l'espace hyperbolique $\mathbf{H}_d$ préservant l'orientation.

À la fin des années 1960, Cheeger [**14**] a défini une constante isopérimétrique $h(M)$ dans le but de minorer la première valeur propre du laplacien de M (inégalité de Cheeger-Maz'ya). La *constante de Cheeger* est définie par

$$h(M) = \inf \frac{\mathrm{vol}_{d-1}(\partial U)}{\mathrm{vol}(U)},$$

où l'infimum est relatif à l'ensemble des ouverts $U \subset M$ de volume (hyperbolique) $\mathrm{vol}(U) \leq \frac{1}{2}\mathrm{vol}(M)$ et de bord une sous-variété (compacte), lisse par morceaux, de dimension $d-1$, et où $\mathrm{vol}_{d-1}(\partial U)$ désigne la mesure volume $(d-1)$-dimensionnelle sur ∂U. On peut vérifier que $h(M)$ est strictement positive.

Le *rayon interne* d'une variété hyperbolique est le rayon de la plus grande boule métrique plongée dans la variété. On attribue généralement à Margulis et Kazhdan la preuve de l'existence d'une constante positive $R = R(d)$ minorant le rayon interne des variétés hyperboliques de dimension d. L'inégalité isopérimétrique dans $\mathbf{H}_d$ implique alors l'existence d'une constante $H = H(d)$ telle que pour toute variété hyperbolique M compacte de dimension d, on a :

$$h(M) \leq H. \tag{1}$$

À l'opposé, quelle que soit la dimension d, on peut construire une suite $(M_i)_{i\in\mathbf{N}}$ de variétés hyperboliques compactes de dimension d telle que la constante de Cheeger $h(M_i)$ tende vers 0 lorsque i tend vers l'infini.

© Astérisque 407, SMF 2019

Voici deux familles d'exemples, aux comportements différents, à garder en tête.

Exemple 1 : revêtements cycliques

Soit M une variété hyperbolique compacte dont le premier nombre de Betti est non nul ; Millson [**37**] montre qu'il en existe en toute dimension. Soit $F \subset M$ une sous-variété de codimension 1 dont la classe duale $[F] \in H^1(M)$ est non triviale. Le produit d'intersection avec F donne lieu à un morphisme surjectif

$$\pi_1(M) \to \mathbf{Z} \tag{2}$$

du groupe fondamental de M vers $\mathbf{Z}$. Soit $(M_i)_{i \geq 1}$ la suite des revêtements cycliques associés à cette surjection ; le revêtement $M_i \to M$ est donc associé au noyau du morphisme $\pi_1(M) \to \mathbf{Z}/i\mathbf{Z}$ obtenu en composant (2) avec le morphisme de réduction modulo i. La figure 1 montre que l'on peut choisir deux élévations F_1 et F_2 de F dans M_i de sorte que $M_i \setminus (F_1 \cup F_2)$ soit la réunion de deux ouverts de volumes supérieurs à $[i/2]\mathrm{vol}(M_0)$. On a donc

$$h(M_i) \leq \frac{2\mathrm{vol}_{n-1}(F)}{[i/2]\mathrm{vol}(M_0)}$$

et $h(M_i)$ tend vers 0 lorsque i tend vers l'infini.

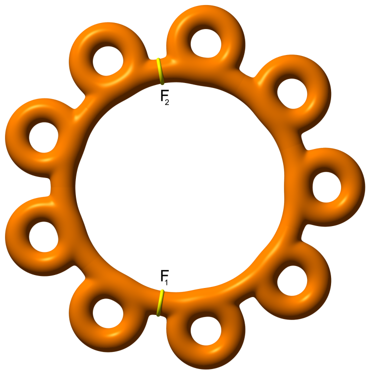

FIGURE 1. Un revêtement cyclique et deux élévations

Exemple 2 : revêtements de congruence

Soit $M = \Gamma\backslash\mathbf{H}_d$ une variété hyperbolique compacte de dimension $d \geq 3$. Selberg [**45**] déduit de la rigidité locale de Γ dans $\mathrm{SO}_0(d,1)$ que, quitte à conjuguer Γ dans $\mathrm{SO}_0(d,1)$, on peut supposer que tous ses éléments sont à coefficients dans un corps de nombres. L'adhérence de Zariski de Γ dans $\mathrm{SL}_{d+1}(\mathbf{C})$ est donc un groupe algébrique et semi-simple défini sur un corps de nombres. Notons $\mathbf{G}$ le groupe algébrique affine et semi-simple sur $\mathbf{Q}$ obtenu par restriction des scalaires. On a alors $\Gamma \subset \mathbf{G}(\mathbf{Q})$ et, puisque Γ est de type fini, il existe même un entier q_0 (le p.p.c.m. des dénominateurs des coefficients matriciels des générateurs de Γ) tel que Γ soit contenu dans $\mathbf{G}(\mathbf{Z}[1/q_0])$. Étant donné un entier q premier à q_0, le morphisme $\pi_q : \mathbf{G}(\mathbf{Z}[1/q_0]) \to \mathbf{G}(\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})$ est bien défini ; on note Γ_q l'intersection de Γ avec le noyau de π_q. On pose enfin $M_q = \Gamma_q \backslash \mathbf{H}_d$; c'est un revêtement fini, dit *de congruence*, de M.

La proposition suivante est un cas particulier d'un théorème de Salehi-Golsefidy et Varjú **[23]**. En appendice on détaille un peu sa (longue) histoire et on donne une brève idée de sa démonstration.

Proposition 0.1. — *Il existe une constante strictement positive $\alpha = \alpha(M)$ telle que pour tout entier q premier à q_0 et sans facteur carré, on ait*

$$h(M_q) \geq \alpha.$$

Les revêtements de congruence, d'origine arithmétique, sont plus difficiles à visualiser que les revêtements cycliques. L'expérience semble indiquer qu'à volume égal ils sont topologiquement plus « complexes » que les revêtements cycliques. Les invariants homologiques usuels ne permettent toutefois pas de confirmer ce sentiment.

Dans ce rapport, on présente une nouvelle notion de complexité topologique d'une variété M, due à Gromov et Guth **[25]** : le volume euclidien minimal occupé par l'image d'un plongement $M \to \mathbf{R}^n$ d'*épaisseur de rétraction au moins* 1, c'est-à-dire dont l'image est un rétract de son 1-voisinage (voir la définition 4.2). On verra que, le long d'une suite de revêtements cycliques, ce volume croît linéairement avec le volume hyperbolique (cf. exemple 6.2). D'un autre côté, on déduit du théorème 8.1 et de la proposition 0.1 le théorème suivant.

Théorème 0.2. — *Soient M une variété hyperbolique compacte de dimension $d \geq 3$ et (M_q) une suite de revêtements de congruence. Le volume de l'image d'un plongement $M_q \to \mathbf{R}^n$ d'épaisseur de rétraction au moins* 1 *est, à une constante multiplicative ne dépendant que de n et d près, supérieur à* $\mathrm{vol}(M_q)^{\frac{n}{n-1}}$.

À volume égal un revêtement de congruence est donc bien topologiquement plus complexe — en tout cas plus difficile à plonger — qu'un revêtement cyclique. Le comportement de la constante de Cheeger les distingue et le théorème 8.1 est un reflet *topologique* de la difficulté à plonger des graphes expanseurs « épaissis » dans un espace euclidien. On peut ainsi penser aux revêtements de congruence comme à des « expanseurs topologiques ». Et, avant d'énoncer et de démontrer le théorème 8.1, on papillonne à travers quelques résultats « d'expansion » qui ont guidé Gromov et Guth. Une étape cruciale est la proposition 7.1. On conclut ce survol par une autre application de cette proposition : l'existence de classes d'isotopie de nœuds dans $\mathbf{R}^3$ qui nécessitent une distorsion arbitrairement grande. Gromov et Guth retrouvent ainsi un théorème récent de Pardon [**40**].

1. CONSTANTE DE CHEEGER ET TOPOLOGIE DES 3-VARIÉTÉS

On sait depuis les années 1970 et les travaux de Mostow que le volume d'une variété hyperbolique compacte de dimension $d \geq 3$ est un invariant *topologique*. Pour ce qui concerne les variétés de dimension 3, un invariant bien plus subtil que le volume est le *genre de Heegaard* : une variété M compacte de dimension 3 peut être décomposée, par exemple en épaississant le 1-squelette d'une triangulation de M, en la réunion de deux corps en anses de bord commun une surface fermée, appelée *surface de Heegaard*. Le genre minimal d'une surface de Heegaard est appelé genre de Heegaard de M et noté $g(M)$.

Un théorème remarquable de Bachman, Cooper et White [**3**] affirme que si M est une variété hyperbolique de dimension 3 de rayon interne $R(M)$, alors le genre de Heegaard de M est essentiellement minoré par le volume d'une boule hyperbolique de rayon $R(M)$:

$$g(M) \geq \frac{1}{2}\cosh(R(M)). \tag{3}$$

Une variété métriquement proche de l'espace hyperbolique $\mathbf{H}_3$ est donc topologiquement compliquée ; c'est en particulier le cas des variétés hyperboliques qui convergent, « au sens de Benjamini-Schramm » (voir [**1**]), vers $\mathbf{H}_3$. Dans le cas des revêtements de congruence, on peut quantifier cela : si Γ est un réseau dans $\mathrm{SO}_0(3,1)$, il découle par exemple de [**1**, Thm. 1.12] qu'il existe une constante positive $\beta = \beta(\Gamma)$ telle que pour tout sous-groupe de congruence $\Gamma_q \subset \Gamma$ le rayon interne de $\Gamma_q \backslash \mathbf{H}_3$ soit supérieur à $\beta \log \mathrm{vol}(\Gamma_q \backslash \mathbf{H}_3)$. On déduit alors de (3) que le genre de Heegaard de $\Gamma_q \backslash \mathbf{H}_3$ est minoré par $\frac{1}{4}\mathrm{vol}(\Gamma_q \backslash \mathbf{H}_3)^{\beta}$.

Compte tenu de la proposition 0.1, la considération de la constante de Cheeger permet de montrer mieux. Marc Lackenby [**31**, Theorem 4.1] prouve en effet que si M est une variété hyperbolique compacte de dimension 3, alors :

$$g(M) \geq \frac{1}{8\pi} h(M)\mathrm{vol}(M). \tag{4}$$

Schéma de démonstration. — Une surface de Heegaard de genre g détermine un « balayage » de M par une famille de surfaces de genre g allant de l'âme du premier corps en anses à l'âme du second. Dans un tel balayage il y a une surface d'aire maximale. On appelle *minimax* la valeur minimale d'un tel maximum. Les travaux de Pitts et Rubinstein [**42**] impliquent que ce minimax peut être réalisé par une surface minimale (d'aire maximale dans un balayage de M). Puisque, d'après le théorème de Gauss-Bonnet, une surface minimale est d'aire majorée par 2π fois sa caractéristique d'Euler, on obtient que toute surface du balayage est d'aire majorée par $4\pi(g-1)$. Finalement il existe une surface S de ce balayage qui partage M en deux morceaux de même volume et, par définition de la constante de Cheeger, on obtient comme annoncé :

$$h(M) \leq \frac{\mathrm{aire}(S)}{(1/2)\mathrm{vol}(M)} \leq \frac{8\pi g}{\mathrm{vol}(M)}. \qquad \square$$

Remarque 1.1. — En dimension 2, le volume détermine complètement la topologie de la variété. On dispose toutefois d'un analogue de (4), mais cette fois l'invariant que l'on relie à la constante de Cheeger, est un invariant *conforme*. Une surface de Riemann compacte X de genre g peut toujours être réalisée comme revêtement ramifié de la sphère de Riemann de degré au plus $g+1$. La *gonalité* $d(X)$ de X est le degré minimal d'une telle réalisation. C'est un invariant bien plus subtil que le genre. On peut montrer, voir [**52, 51, 2**], que si $X = \Gamma\backslash\mathbf{H}_2$ est une surface (ou un orbifold) d'aire finie, alors

$$d(X) \geq \frac{1}{32\pi} h(X)^2 \mathrm{aire}(X).$$

Cette minoration a des conséquences arithmétiques intéressantes. Le théorème de Faltings [**19**] sur les points rationnels d'une variété abélienne permet en effet de montrer qu'une courbe de gonalité suffisamment grande ne contient qu'un nombre fini de points rationnels dont les coordonnées appartiennent à une réunion de corps de nombres de degrés bornés. Appliqué aux revêtements de congruence $X_0(N)$ de la surface modulaire et à un degré D, ce théorème implique que pour $N \geq 230D$, l'ensemble des points de $X_0(N)$ dont les coordonnées appartiennent à la réunion de tous les corps de nombres de degré au plus D est fini. Des travaux récents d'Ellenberg, Hall et Kowalski [**16**], parus dans le même volume que l'article de Gromov et Guth, appliquent une idée similaire à l'étude d'un problème diophantien sur une tour de courbes.

La démonstration esquissée ci-dessus de l'inégalité (4) suggère plus qu'une minoration du genre de Heegaard de M : toute application lisse générique $F : M \to \mathbf{R}$ doit avoir une fibre compliquée. C'est précisément ce que montre Gromov [**24**, §6.2] lorsque M est de dimension 3. Alors, il existe une constante universelle $C > 0$ telle que la somme des nombres de Betti de l'une des fibres de F soit supérieure à $\frac{1}{C}h(M)\mathrm{vol}(M)$.

Appliquée à une suite (M_q) de revêtements de congruence, cette inégalité rappelle une inégalité analogue pour les graphes expanseurs que l'on détaille dans le paragraphe suivant.