Séminaire BOURBAKI Juin 2017
69e année, 2016–2017, nº 1135, p. 565 à 584
doi:10.24033/ast.1073

SOLUTIONS FAIBLES DE L'ÉQUATION DE NAVIER-STOKES DES FLUIDES COMPRESSIBLES [d'après A. Vasseur et C. Yu]

par **Frédéric ROUSSET**

INTRODUCTION

Dans cet exposé, on considère un système classique d'équations aux dérivées partielles décrivant le mouvement d'un fluide visqueux. On notera $\rho(t,x) \geq 0$, la densité du fluide, $u(t,x) \in \mathbb{R}^d$ le champ de vitesse du fluide, et $p(t,x) \in \mathbb{R}$ la pression, t désigne la variable de temps et x la variable d'espace. Dans tout l'exposé on supposera que $x \in \Omega = \mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$, $d = 2, 3$, ce qui peut s'interpréter comme des conditions aux limites périodiques. La plupart des résultats sont aussi valables si on suppose que le fluide emplit tout l'espace, c'est-à-dire $x \in \mathbb{R}^d$. On obtient le système

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) + \nabla p = \nabla \cdot \tau, \end{cases} \tag{1}$$

où la matrice τ est définie de telle sorte que $\sigma = \tau - p\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^d}$ est le tenseur des contraintes :

$$\sigma = 2\mu Du + (\lambda \nabla \cdot u - p)\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}, \quad Du = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^\top).$$

On supposera que l'évolution du fluide se fait à température constante. La première équation du système exprime la conservation de la masse, la deuxième, l'évolution de la quantité de mouvement.

Si l'on suppose de plus que la densité ρ est constante, le système se réduit au système de Navier-Stokes pour les fluides incompressibles (homogènes)

$$\partial_t u + u \cdot \nabla u + \nabla p = \mu \Delta u, \quad \nabla \cdot u = 0. \tag{2}$$

Notons que l'incompressibilité se traduit par le fait que le champ de vitesse est à divergence nulle, il n'y a pas d'équation d'évolution sur la pression p, elle est déterminée indirectement par la contrainte. On suppose le fluide visqueux, donc $\mu > 0$.

On va s'intéresser au problème de Cauchy, c'est-à-dire à l'existence d'une solution au système lorsqu'on ajoute une condition initiale qui se réduit à $u|_{t=0} = u_0$. Il y a classiquement deux manières d'aborder le problème. L'une se base sur l'identité d'énergie associée à ce système : en prenant le produit scalaire de (2) par u et en intégrant en espace, on remarque formellement (c'est-à-dire en supposant que la solution est suffisamment régulière pour que toutes les manipulations soient licites) que

$$\int_\Omega (u \cdot \nabla u) \cdot u \, dx = -\frac{1}{2} \int_\Omega |u|^2 \nabla \cdot u \, dx = 0, \quad \int_\Omega \nabla p \cdot u = -\int_\Omega p \, \nabla \cdot u \, dx = 0$$

et donc on obtient l'identité d'énergie

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_\Omega |u|^2 dx + \mu \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx = 0.$$

En intégrant en temps on obtient un contrôle de u dans $L^\infty(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega)) \cap L^2(\mathbb{R}_+, H^1(\Omega))$. On est alors naturellement amené à essayer de construire une solution faible, c'est-à-dire vérifiant (2) au sens des distributions dans cet espace. Pour l'équation de Navier-Stokes incompressible, c'est le fameux résultat de Leray **[22]** :

THÉORÈME 0.1 (Leray). — *Pour tout* $u_0 \in L^2(\Omega)$*, tel que* $\nabla \cdot u_0 = 0$*, il existe une solution faible* $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega)) \cap L^2(\mathbb{R}_+, H^1(\Omega))$ *et vérifiant pour presque tout* $T > 0$ *l'inégalité d'énergie :*

$$\|u(T)\|_{L^2}^2 + 2\mu \int_0^T \|\nabla u(s)\|_{L^2}^2 \, ds \leq \|u_0\|_{L^2}^2.$$

Une fois ce type de résultat obtenu, les questions importantes restant à résoudre sont l'unicité (le théorème ci-dessus est un résultat d'existence sans unicité), et la régularité (si la donnée initiale est plus régulière, peut-on avoir une solution qui garde cette régularité supplémentaire pour tout temps **[11]** ?).

L'autre approche classique du problème de Cauchy consiste à utiliser l'invariance par changement d'échelle de l'équation : si $u(t,x)$ est solution de (2) alors $u_\lambda(t,x) = \lambda u(\lambda^2 t, \lambda x)$ est solution de la même équation. Cette approche initiée par Kato consiste à chercher des solutions « fortes », vérifiant la formule de Duhamel (en supposant $\mu = 1$ pour simplifier l'écriture)

$$u(t) = e^{t\Delta} u_0 - \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \nabla \cdot (u \otimes u)(s) \, ds,$$

où $\mathbb{P}$ est la projection orthogonale sur les champs à divergence nulle, dans des espaces critiques c'est-à-dire ceux qui sont invariants par le changement d'échelle de l'équation (c'est-à-dire un espace X pour lequel $\|(u_0)_\lambda\|_X = \|u_0\|_X$). Cette approche permet de montrer que le problème est globalement bien posé (c'est-à-dire existence, unicité, et dependance continue par rapport aux données dans des espaces $X_T \subset \mathcal{C}([0,T], X)$)

pour des données initiales petites. Toutefois, cette approche ne fournit qu'une existence locale pour des données quelconques. Notons qu'en dimension deux, L^2 est un espace critique de telle sorte que l'approche de Leray et celle de Kato coïncident. En dimension trois il existe toute une échelle d'espaces pour lesquels ce programme a été réalisé, $\dot{H}^{\frac{1}{2}} \subset L^3 \cdots \subset BMO^{-1}$ **[14, 19, 20]** ; on renvoie par exemple à **[21]**. Notons que dans cette échelle d'espaces critiques une fonction peut être grande dans l'un et petite dans un autre.

On va maintenant s'intéresser à (1) dans le cas des fluides compressibles, on ne suppose donc plus que ρ est constante mais pour fermer le système on suppose que le fluide est barotrope, la pression p est une fonction de la densité, on considérera uniquement le cas des fluides polytropiques $p(\rho) = a\rho^\gamma$ où a est une constante strictement positive et $\gamma > 1$. Les coefficients de Lamé μ et λ peuvent dépendre de ρ. Il y a naturellement une estimation d'énergie pour le système (1) qui s'écrit

$$(3)\quad \frac{d}{dt}E(t) + \int_\Omega \left(2\mu|Du|^2 + \lambda|\nabla\cdot u|^2\right)\,dx = 0, \quad E(t) = \int_\Omega \left(\rho\frac{|u|^2}{2} + a\frac{\rho^\gamma}{\gamma-1}\right)\,dx.$$

Il y a aussi une invariance d'échelle, si (ρ, u) est solution alors $(\rho_\lambda, u_\lambda)$ avec $\rho_\lambda(t,x) = \rho(\lambda^2 t, \lambda x)$, $u_\lambda(t,x) = \lambda u(\lambda^2 t, \lambda x)$ est encore solution si on change p en $\lambda^2 p$. On peut donc naturellement se poser la question de l'existence globale de solution faible vérifiant l'inégalité d'énergie et de l'existence de solutions fortes. Dans le cas des fluides compressibles une nouvelle difficulté apparaît, liée à la présence potentielle de vide, c'est-à-dire de zones dans le fluide pour lesquelles la densité ρ s'annule. Il existe de très nombreux travaux établissant l'existence de solutions fortes globales sans vide dans des espaces critiques pour des données initiales qui sont des perturbations d'équilibres du type $(\rho = 1, u = 0)$, on peut par exemple citer **[9]**. En dimension deux d'espace, il y a des résultats d'existence globale non perturbatifs de solutions fortes sans vide pour des choix particuliers des coefficients λ et μ, $\lambda(\rho) = \rho^\beta$, $\beta > 3$ et $\mu(\rho) = 1$, **[29]**. Pour un panorama des divers types de notions de solutions pour les équations de Navier-Stokes des fluides compressibles, on renvoie par exemple à **[25]**.

Dans cet exposé, on va se concentrer sur des résultats récents d'existence de solutions faibles dans un cadre qui autorise la présence ou la formation de vide. Dans la suite de l'exposé, une solution faible désignera toujours une solution globale faible.

1. CAS DES VISCOSITÉS CONSTANTES

Nous allons d'abord rapidement rappeler le résultat d'existence de solutions faibles dû à P.-L. Lions **[23]** et amélioré par E. Feireisl et collaborateurs **[13]** ; ce résultat est valable dans le cadre où les coefficients μ et λ sont des constantes (donc sont indépendants de ρ) et vérifient $\mu > 0$, $\lambda + 2\mu > 0$.

Comme on autorise la densité à s'annuler, on écrit la condition initiale sous la forme

$$\rho|_{t=0} = \rho_0, \quad (\rho u)|_{t=0} = m_0 \tag{4}$$

où m_0 est telle que $m_0 = 0$ sur $\{\rho_0 = 0\}$. Dans ce cadre, on appelle solution faible renormalisée (ρ, u), une solution de (1) au sens des distributions telle que la densitéé est une solution renormalisée de l'équation de conservation de la masse. Cela signifie que pour toute fonction $\beta \in \mathcal{C}^1([0, +\infty[, \mathbb{R})$ (avec des conditions de croissance à l'infini), $\beta(\rho)$ vérifie aussi au sens des distributions

$$\partial_t \beta + \nabla \cdot (u\beta) + (\rho\beta' - \beta)\nabla \cdot u = 0.$$

On a par exemple le résultat suivant :

THÉORÈME 1.1 (P.-L. Lions). — *Si $\rho_0 \in L^\gamma$, $m_0/\rho_0 \in L^1$ et $\gamma > 3d/(d+2)$, il existe une solution faible renormalisée de* (1), (4), *vérifiant l'inégalité d'énergie :*

$$E(T) + \int_0^T \int_\Omega \left(2\mu|Du|^2 + \lambda|\nabla \cdot u|^2\right) \, dx, \quad \leq E_0, \quad p.p.\ T, \tag{5}$$

avec $E(t) = \int_\Omega (\rho \frac{|u|^2}{2} + \frac{a\rho^\gamma}{\gamma - 1}) \, dx$.

Le résultat ci-dessus a été généralisé à $\gamma > d/2$ par E. Feireisl [**13**]. En dimension 2, il a été établi pour $\gamma = 1$ dans [**26**].

Notons que pour μ et λ constants, le terme de dissipation d'énergie se met aussi sous la forme

$$\int_\Omega \left(2\mu|Du|^2 + \lambda|\nabla \cdot u|^2\right) \, dx = \int_\Omega \left(\mu|\nabla u|^2 + (\lambda + \mu)|\nabla \cdot u|^2\right) \, dx.$$

Pour montrer l'existence d'une solution faible, on suit classiquement le plan suivant :

1. Établir des estimations *a priori* sur des solutions assez régulières du système (on a déjà l'estimation d'énergie).
2. Approcher le système par une suite de systèmes meilleurs (c'est-à-dire pour lesquels on sait déjà montrer l'existence d'une solution globale) et de telle sorte que les estimations *a priori* sont valides uniformément. Cela génère une suite de solutions approchées (ρ_n, u_n).
3. À extraction de sous-suite près, montrer par des arguments de compacité à l'aide des estimations *a priori* uniformes que (ρ_n, u_n) converge vers une solution faible (ρ, u) du système de départ.

Dans l'optique de réaliser le programme ci-dessus, en particulier le point 3, il est naturel de se poser la question de la stabilité des solutions faibles : si on considère (ρ_n, u_n) une suite de solutions faibles vérifiant uniformément les estimations *a priori*, peut-on montrer que (à sous-suite près) (ρ_n, u_n) converge vers une solution faible (ρ, u) ? Cela permet de se focaliser sur le problème de la compacité dans le système indépendamment du problème de la régularisation du système.

Nous allons maintenant rapidement étudier la stabilité des solutions faibles dans le cadre ci-dessus. De manière classique, la difficulté est de passer à la limite dans les termes non linéaires, les convergences faibles qui se déduisent immédiatement des estimations *a priori* n'étant en général pas suffisantes pour le faire.

L'estimation d'énergie assure que (ρ_n) est bornée dans $L^\infty_T L^\gamma$ et $(\rho_n^{\frac{1}{2}} u_n)$ dans $L^\infty_T L^2$. De plus u_n est bornée dans $L^2_T H^1$. Dans toute la suite, on utilise la notation $L^p_T X$ pour $L^p([0,T],X)$, avec X espace de Banach. Il est relativement facile de passer à la limite dans le système dans les termes du type $\rho_n u_n$ et $\rho_n u_n \otimes u_n$, le point clé étant la borne $L^2_T H^1$ sur u_n. Admettons la convergence du premier pour nous concentrer sur le deuxième. On peut d'abord montrer que $\rho_n^{\frac{1}{2}} u_n$ converge fortement dans $L^2_T L^2$. Pour cela, on remarque que

$$\int_0^T \int_\Omega \rho_n |u_n|^2 \, dtdx = \langle \rho_n u_n, u_n \rangle_{L^2_T H^{-1},\, L^2_T H^1}. \tag{6}$$

Comme u_n converge faiblement dans $L^2_T H^1$, il suffit de montrer que $\rho_n u_n$ converge fortement dans $L^2_T H^{-1}$ pour passer à la limite. On observe par Hölder que $\rho_n u_n$ est bornée dans $L^\infty_T L^{\frac{2\gamma}{\gamma+2}}$ et par l'équation sur la quantité de mouvement dans (1), on obtient que $\partial_t(\rho_n u_n)$ est bornée dans $L^2_T H^{-s}$ pour s suffisamment grand. En utilisant que $\gamma > d/2$ et le lemme de compacité d'Aubin-Lions, on conclut à la convergence forte de $\rho_n u_n$ dans $L^2_T H^{-1}$ et donc on obtient que

$$\int_0^T \int_\Omega \rho_n |u_n|^2 \, dtdx \to \int_0^T \int_\Omega \rho |u|^2 \, dtdx$$

puis que $\rho_n u_n$ converge fortement dans $L^2_T L^2$. Ceci étant établi, on passe facilement à la limite dans le terme $\rho_n u_n \otimes u_n$ en utilisant que $\rho_n u_n$ converge fortement vers ρu dans $L^2_T L^2$ et que u_n converge faiblement vers u dans $L^2_T L^2$.

La difficulté la plus sérieuse est en fait pour passer à la limite dans la pression, c'est-à-dire dans le terme $a\rho_n^\gamma$ puisque les estimations *a priori* ne donnent aucune compacité forte sur ρ_n. La preuve assez longue utilise plusieurs idées importantes :

- intégrabilité supplémentaire pour la densité : $\rho_n^{\gamma+\theta}$ est bornée dans $L^1_T L^1$ pour un $\theta > 0$. Cela s'obtient par une estimation d'énergie avec un multiplicateur bien choisi ;
- compacité pour le flux effectif : le flux effectif $a\rho_n^\gamma - (2\mu+\lambda)\nabla \cdot u_n$ possède une propriété de compacité. Cela permet de déduire que

  $$\overline{\rho \nabla \cdot u} - \rho \nabla \cdot u = \frac{1}{2\mu+\lambda}(a\overline{\rho^\gamma}\,\rho - \overline{\rho^\gamma \rho})$$

  où $\overline{\cdot}$ désigne la limite faible ;