Bull. Soc. Math. France
147 (2), 2019, p. 303-340

MÉTRIQUES HYPERKÄHLÉRIENNES PLIÉES

PAR OLIVIER BIQUARD

RÉSUMÉ. — N. Hitchin a récemment introduit la notion de métrique hyperkählérienne pliée, liée aux fibrés de Higgs pour le groupe $SL(\infty, \mathbb{R})$.

Nous construisons de telles métriques et montrons l'existence locale de la composante de Hitchin pour $SL(\infty, \mathbb{R})$.

ABSTRACT (*Folded hyperkähler metrics*). — N. Hitchin recently introduced the notion of folded hyperKähler metrics, in relation with $SL(\infty, \mathbb{R})$ Higgs bundles.

We provide a construction of such metrics, and prove the local existence of the Hitchin component for $SL(\infty, \mathbb{R})$.

Introduction

Soit M^4 une variété orientée de dimension 4. Une métrique hyperkählérienne sur M peut être vue comme la donnée de trois formes symplectiques, ω_a, telles

Texte reçu le 27 février 2018, accepté le 29 juillet 2018.

OLIVIER BIQUARD, Sorbonne Université et École Normale Supérieure, Université PSL • Département de Mathématiques et Applications, École Normale Supérieure, 45 rue d'Ulm, 75005 Paris, France • *E-mail :* `olivier.biquard@ens.fr`

Classification mathématique par sujets (2010). — 53C26, 32Q20.

Mots clefs. — Métrique hyperkählérienne pliée, fibré de Higgs, composante de Hitchin.

This work has received support under the program "Investissements d'Avenir" launched by the French Government and implemented by ANR with the reference ANR-10-IDEX-0001-02 PSL.

 0037-9484/2019/303/\$ 5.00
© Société Mathématique de France doi:10.24033/bsmf2783

que

$$\omega_a \wedge \omega_b = \delta_{ab} v, \tag{1}$$

où v est une forme volume sur M. Il existe alors une métrique g et trois structures complexes J_a sur M par rapport auxquelles g est kählérienne, avec formes de Kähler ω_a.

N. Hitchin [12] a introduit la notion de métrique hyperkählérienne *pliée* (folded) : la 4-forme v n'est plus une forme volume, mais peut s'annuler transversalement sur une sous-variété $X^3 \subset M^4$; sur $M \setminus X$ on obtient alors une métrique hyperkählérienne, positive ou négative suivant les composantes connexes. L'exemple standard est le fibré en 2-sphères d'une surface hyperbolique Σ,

$$M = T^*\Sigma \cup \Sigma,$$

avec X le fibré unitaire en cercles de $T^*\Sigma$; la métrique est l'analogue non compact de la métrique de Eguchi-Hanson sur T^*P^1. Dans ce cas, les formes ω_2 et ω_3 se restreignent en un couple générique de 2-formes fermées sur X, alors que ω_1 s'annule. Il y a une involution ι qui échange les deux côtés en fixant X, et

$$\iota^* g = -g, \quad \iota^*\omega_1 = -\omega_1, \quad \iota^*\omega_2 = \omega_2, \quad \iota^*\omega_3 = \omega_3. \tag{2}$$

Il y a deux constructions de métriques hyperkählériennes pliées [12] :

- une construction locale, qui à partir d'un couple générique (ω_2, ω_3) de 2-formes fermées analytiques réelles sur X, produit une métrique hyperkählérienne pliée dans un voisinage ; cette métrique possède une involution ι comme ci-dessus (une autre approche pour ce résultat est proposée dans la section 1, voir théorème 1.1 ; cette approche aboutit aussi à un énoncé d'unicité qui implique l'existence locale de l'involution ι) ;
- une construction globale à partir de solutions des équations d'autodualité de Hitchin [11] pour des $SL(\infty, \mathbb{R})$-fibrés de Higgs sur Σ ; si on ne sait pas produire en général de telle solution, une famille de dimension finie vient du plongement $SL(2, \mathbb{R}) \subset SL(\infty, \mathbb{R})$; cette famille contient le modèle standard, induit par le fibré de Higgs correspondant à la représentation fuchsienne de $\pi_1(\Sigma)$ dans $SL(2, \mathbb{R})$.

La construction à partir de $SL(\infty, \mathbb{R})$-fibrés de Higgs suggère que les métriques hyperkählériennes pliées doivent venir dans des familles de dimension infinie. Le but de cet article est de confirmer cette intuition et de décrire l'espace des déformations. Il est aussi de montrer l'existence de la composante de

Hitchin pour $SL(\infty, \mathbb{R})$, qui correspond aux métriques hyperkählériennes pliées munies d'une projection holomorphe sur la surface Σ.

Le premier résultat de cet article est formulé dans le cadre où M est réunion de deux domaines fermés, délimités par X :

$$M = M_0 \cup M_1, \quad M_0 \cap M_1 = X,$$

échangés par l'involution ι. Si la forme symplectique holomorphe $\omega^c = \omega_2 + i\omega_3$ d'une métrique hyperkählérienne pliée le long de X n'est plus symplectique le long de X, en revanche, sur le quotient par l'involution ι,

$$M_s := M/\iota,$$

elle définit une forme symplectique holomorphe jusqu'au bord. La structure différentielle de M_s au bord X diffère de celle de M_0 : si x est une équation lisse de X dans M_0, alors x^2 est une équation lisse du bord dans M_s (d'où le *pli*).

Théorème 0.1. — *Soit une métrique hyperkählérienne g pliée sur M. Alors :*

i. *toutes les déformations infinitésimales de métriques hyperkählériennes pliées s'intègrent en des métriques hyperkählériennes pliées ;*
ii. *toute déformation infinitésimale de la variété holomorphe symplectique à bord M_s donne lieu à une déformation infinitésimale de métrique hyperkählérienne pliée, quitte à modifier M_s par un difféomorphisme infinitésimal ne préservant pas nécessairement le bord X.*

Comme il y a beaucoup de déformations infinitésimales holomorphes symplectiques, le théorème fournit bien la construction de métriques hyperkählériennes pliées.

Il peut sembler curieux de faire agir les difféomorphismes ne préservant pas le bord, mais cela a un sens pour les difféomorphismes infinitésimaux : le champ de vecteurs n'est pas nécessairement tangent au bord. Cette description suggère que les déformations de métriques hyperkählériennes pliées sont liées aux déformations holomorphes symplectiques à frontière libre.

Précisons la question sous-jacente : épaississons un peu M_s, c'est-à-dire supposons que

$$M_s \subset N,$$

où N est une variété holomorphe symplectique sans bord (dans le cas modèle, un voisinage ouvert du fibré en disques dans $T^*\Sigma$), et fixons $\zeta_1 \in H^2(N, X)$ la « classe de Kähler pliée ». Considérons une déformation holomorphe symplectique N' de N. Pour chaque déformation $X' \subset N'$ du bord X, appelons D'

le domaine de N' délimité par X', et fixons une forme de Kähler ω_1 sur D', pliée sur X', et dans la classe ζ_1. Notons $\omega^c = \omega_2 + i\omega_3$ la forme holomorphe symplectique de N'.

Question (Problème de Monge-Ampère à frontière libre). — *Trouver* (X', f) *tel que* $(\omega_1 + i\partial\bar\partial f)^2 = \frac{1}{2}\omega^c \wedge \overline{\omega^c}$, *où* f *est une fonction sur* D', *et* $f = O(y)$ *près de* X' *(où* y *est une équation de* X *dans* N'*).*

Une telle solution du problème de Monge-Ampère donnerait une métrique hyperkählérienne pliée sur le domaine de N' délimité par X'. Le point important ici est qu'il est nécessaire de pouvoir déplacer X' pour résoudre l'équation. La question présente des analogies avec les questions de S. Donaldson à frontière libre [8]. Voir la fin de la section 5 pour une interprétation en termes de la complexification du groupe des symplectomorphismes induisant un contactomorphisme au bord.

La composante de Hitchin pour le groupe $SL(\infty, \mathbb{R})$ s'interprète [12] comme un espace de métriques hyperkählériennes pliées avec projection holomorphe sur la surface Σ, c'est-à-dire l'ensemble des domaines de $T^*\Sigma$ portant une métrique hyperkählérienne pliée. Cela correspond à résoudre la question ci-avant pour des domaines de $T^*\Sigma$. Nous démontrons l'existence locale de cette composante :

Théorème 0.2. — *Au voisinage de la métrique hyperkählérienne pliée standard sur le fibré en disques de* $T^*\Sigma$, *la composante de Hitchin pour le groupe* $SL(\infty, \mathbb{R})$ *est une variété paramétrée par* $\oplus_{n\geqslant 2} H^0(\Sigma, K^n)$.

Voir le théorème 8.2 pour l'énoncé technique précis : l'espace de différentielles holomorphes $\oplus_{n\geqslant 2} H^0(\Sigma, K^n)$ est interprété comme un espace de fonctions CR holomorphes sur le bord du fibré en disques, et une certaine régularité dans les espaces de Folland-Stein est nécessaire. Le lien entre ces fonctions et les déformations du domaine correspondant à la composante de Hitchin est le suivant : ces déformations correspondent infinitésimalement au déplacement du bord du fibré en disques par un champ de vecteurs $fw\partial_w$, où f est une fonction CR holomorphe sur le bord et $w\partial_w$ est le vecteur de dilatation dans $T^*\Sigma$.

Le théorème confirme l'intuition que la composante de Hitchin pour $SL(\infty, \mathbb{R})$ devrait être une sorte de limite des composantes de Hitchin pour les groupes $SL(k, \mathbb{R})$, lesquelles sont paramétrées par des sommes finies d'espaces de différentielles holomorphes. En outre, la paramétrisation dans le théorème 0.2 peut être choisie pour être une section d'un analogue de la fibration de Hitchin, voir remarque 8.3.

Les sections 1 et 2 sont consacrées à la description de la géométrie au bord et à la mise en forme comme un problème non linéaire sur les différentielles de trois 1-formes ; l'analyse des déformations hyperkählériennes de cette manière n'est pas nouvelle, ce qui compte ici est de déterminer les conditions au bord correspondant à la géométrie (un travail en cours de J. Fine, J. Lotay et M. Singer analyse le cas d'un bord standard). Les espaces fonctionnels adéquats, repris de [4], sont introduits dans la section 3, la linéarisation du problème est analysée section 4, et section 5 les déformations infinitésimales sont comprises en termes de la géométrie holomorphe symplectique. Dans la section 6, on détermine les déformations infinitésimales correspondant aux $SL(\infty,\mathbb{R})$-fibrés de Higgs sur la surface de Riemann Σ : elles sont paramétrées par les différentielles holomorphes de tous degrés (au moins quadratiques). Un problème technique se pose alors pour parvenir au théorème 0.2 : la paramétrisation du déplacement du bord du domaine holomorphe symplectique par une fonction (donnant le déplacement radial) se fait a priori avec perte de dérivées. Cette question est contournée par la section 7 qui propose une paramétrisation de tous les domaines du cotangent en termes de fibrations (non holomorphes) par des disques holomorphes, suivant des idées remontant à Burns, Epstein, Lempert et Bland dans les années 90, notre approche ici étant basée sur [3]. Cela permet de déduire le théorème 0.2 section 8. Finalement, l'asymptotique au bord des métriques nécessite le développement d'une analyse, reportée jusqu'à la section 9.

Mes remerciements vont à N. Hitchin, pour les nombreux échanges qui ont permis l'existence de cet article. Je remercie aussi C. Guillarmou pour d'utiles discussions sur le laplacien plié au début de ce travail.

1. La géométrie au bord et son modèle

On commence par préciser le comportement au bord d'une métrique hyperkählérienne pliée [12]. Nous avons un triplet $(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$ de 2-formes sur une variété M, qui en dehors d'une hypersurface X (le « pli ») donne une métrique hyperkählérienne (définie positive ou définie négative). Soit $i : X \hookrightarrow M$ l'injection. On a

$$i^*\omega_1 = 0, \tag{3}$$

alors que les formes ω_2 et ω_3, restreintes à X, ont chacune un noyau de dimension 1, dont la somme est une distribution de contact :

$$H = \ker i^*\omega_2 \oplus \ker i^*\omega_3. \tag{4}$$