ISSN 0012-9593

quatrième série - tome 51 *fascicule 6* *novembre-décembre 2018*

ANNALES SCIENTIFIQUES de L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

Aurélien ALVAREZ & Vincent LAFFORGUE

Actions affines isométriques propres des groupes hyperboliques sur des quotients d'espaces ℓ^p

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure

Publiées avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

Rédaction / *Editor*

Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure,
45, rue d'Ulm, 75230 Paris Cedex 05, France.
Tél. : (33) 1 44 32 20 88. Fax : (33) 1 44 32 20 80.
annales@ens.fr

Édition et abonnements / *Publication and subscriptions*

Société Mathématique de France
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 09
Tél. : (33) 04 91 26 74 64
Fax : (33) 04 91 41 17 51
email : abonnements@smf.emath.fr

Tarifs

Abonnement électronique : 420 euros.
Abonnement avec supplément papier :
Europe : 540 €. Hors Europe : 595 € ($ 863). Vente au numéro : 77 €.

ISSN 0012-9593 (print) 1873-2151 (electronic)

Directeur de la publication : Stéphane Seuret
Périodicité : 6 nos / an

Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.
4^{e} série, t. 51, 2018, p. 1389 à 1398

ACTIONS AFFINES ISOMÉTRIQUES PROPRES DES GROUPES HYPERBOLIQUES SUR DES QUOTIENTS D'ESPACES ℓ^p

PAR AURÉLIEN ALVAREZ ET VINCENT LAFFORGUE

RÉSUMÉ. – Nous démontrons que tout groupe hyperbolique admet une action affine isométrique propre sur un quotient d'un espace de Banach ℓ^p, pour tout $p > 1$ suffisamment proche de 1.

ABSTRACT. – We prove that any hyperbolic group admits a proper affine isometric action on a quotient of a ℓ^p-space, for all $p > 1$ close enough to 1.

1. Point de départ

Dans un travail précédent [1], nous donnions une nouvelle démonstration élémentaire et auto-contenue d'un théorème de Yu : tout groupe hyperbolique admet une action affine isométrique propre sur un espace ℓ^p pour p suffisamment grand [5]. Nous renvoyons le lecteur à l'introduction de [1] pour une présentation du contexte mathématique et des principaux résultats autour des actions affines isométriques propres, et au premier paragraphe pour ce qui concerne les définitions ; nous rappelons ici la méthode, bien connue par ailleurs, que nous utilisons pour construire des actions affines.

Une méthode utile pour construire des actions affines

Soit $(\mathcal{E}^\circ, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et π une action continue isométrique d'un groupe topologique G sur $\mathcal{E}^\circ$. Supposons donné un espace vectoriel V, un plongement d'espace vectoriel de $\mathcal{E}^\circ$ dans V et une action linéaire de G sur V qui stabilise $\mathcal{E}^\circ$ et dont la restriction à $\mathcal{E}^\circ$ est π. Si $\xi_\circ$ est un élément de V tel que, pour tout g de G, le vecteur $\xi_\circ - g\cdot\xi_\circ$ appartient au sous-espace $\mathcal{E}^\circ$ et $g \longmapsto \xi_\circ - g\cdot\xi_\circ$ est continue de G dans $\mathcal{E}^\circ$, alors l'action linéaire de G sur V se restreint en une action continue affine isométrique de G sur l'espace de Banach affine $\mathcal{E} = \xi_\circ + \mathcal{E}^\circ$. Cette dernière est aussi donnée par le cocycle $g \longmapsto \xi_\circ - g\cdot\xi_\circ$. Par définition, l'action est propre si et seulement si $\lim_{g\to\infty} \|\xi_\circ - g\cdot\xi_\circ\| = \infty$.

Comme exemple immédiat d'application de cette méthode, nous en déduisons dans [1] que tout groupe discret G de type fini admet une action affine isométrique propre sur l'espace de Banach affine $d(1,\cdot) + \ell^\infty(G)$, le cocycle étant dans ce cas donné par la fonction

doi:10.24033/asens.2377

$c(g) = d(1,\cdot) - d(g,\cdot)$, où d désigne la métrique des mots une fois fixé un système fini de générateurs.

PROPOSITION 1.1. – *Tout groupe discret G de type fini admet une action affine isométrique propre sur un quotient d'un espace de Banach ℓ^1 d'une réunion finie de copies de G.*

Démonstration. – Commençons par rappeler que si $\mathcal{G} = (\mathcal{G}^0, \mathcal{G}^1)$ est un graphe orienté connexe, où $\mathcal{G}^0$ et $\mathcal{G}^1$ désignent les ensembles de sommets et d'arêtes, on a un opérateur *bord*

$$\partial : \ell^1(\mathcal{G}^1) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{G}^0),$$

où $\mathcal{F}(\mathcal{G}^0)$ désigne l'espace vectoriel des fonctions réelles sur les sommets. Précisons ce point. Par définition, $\ell^1(\mathcal{G}^1)$ est la complétion pour la norme $||\cdot||_1$ de l'espace vectoriel $\mathcal{F}_f(\mathcal{G}^1)$ des fonctions à support fini sur les arêtes de $\mathcal{G}$. L'image par l'opérateur bord d'une arête $x \to y$ est par définition la 0-chaîne $\delta_y - \delta_x$ qui est une fonction (à support fini) de somme nulle sur les sommets de $\mathcal{G}$. Par linéarité, ∂ s'étend en une application linéaire de $\mathcal{F}_f(\mathcal{G}^1)$ dans l'espace vectoriel $\mathcal{F}_f^0(\mathcal{G}^0)$ des fonctions à support fini et de somme nulle sur les sommets. De plus, cette application est surjective : étant donné deux sommets x et y de $\mathcal{G}$, la fonction $\delta_y - \delta_x$ est l'image de n'importe quel chemin d'arêtes reliant x à y. On peut ainsi définir une norme image sur $\mathcal{F}_f^0(\mathcal{G}^0)$ qui se calcule facilement sur une fonction de la forme $\delta_y - \delta_x$: par définition, c'est l'infimum des normes $||\cdot||_1$ des fonctions c de $\mathcal{F}_f(\mathcal{G}^1)$ telles que $\partial(c) = \delta_y - \delta_x$. Il n'est pas difficile de voir que pour calculer cet infimum il suffit de considérer les fonctions caractéristiques des chemins d'arêtes reliant x à y (pour une démonstration complète de ce point, on pourra se reporter au lemme 2.8), et qu'on obtient ainsi la distance dans le graphe entre x et y. Par complétion des espaces de fonctions à support fini, on en déduit finalement que l'opérateur bord s'étend en une application linéaire bornée surjective de $\ell^1(\mathcal{G}^1)$ dans la complétion pour la norme image de $||\cdot||_1$ de $\mathcal{F}_f^0(\mathcal{G}^0)$.

Dans le cas où $\mathcal{G}$ est le graphe de Cayley de G associé à un système fini de générateurs, l'action naturelle de G sur $\mathcal{G}^0$ induit une action isométrique π de G sur l'espace de Banach $\mathcal{E}^\circ$ obtenu par complétion pour la norme image de $||\cdot||_1$ de l'espace vectoriel $\mathcal{F}_f^0(\mathcal{G}^0)$ des fonctions à support fini et de somme nulle sur les sommets. L'action affine de G sur l'espace affine des fonctions à support fini et de somme 1 sur les sommets induit alors par cette complétion une action affine isométrique de partie linéaire $(\pi, \mathcal{E}^\circ)$.

Nous allons maintenant expliciter cette action affine isométrique de G dans le cadre de la méthode rappelée ci-dessus pour construire des actions affines. En prenant $\xi_0 = \delta_1$ la masse de Dirac en l'élément neutre de G, $\mathcal{E}^0 = \partial(\ell^1(\mathcal{G}^1))$ comme espace de Banach et $V = \mathcal{F}(\mathcal{G}^0)$ comme espace vectoriel, on retrouve l'action affine isométrique ci-dessus en tant qu'action affine isométrique de G sur l'espace de Banach affine $\delta_1 + \partial(\ell^1(\mathcal{G}^1))$ donnée par le cocycle $g \longmapsto \delta_1 - \delta_g$. La norme de celui-ci n'est autre que la distance de g à l'élément neutre du groupe, donc l'action est propre. Il ne reste plus qu'à noter que le G-espace des arêtes $\mathcal{G}^1$ s'identifie à une réunion finie de copies de G. En effet, pour tout entier naturel R, l'application $(x, y) \longmapsto (x, x^{-1}y)$ de $X^{\leq R} = \{(x, y) \in G \times G; d(x, y) \leq R\}$ dans $G \times B(1, R)$ est une bijection G-équivariante, où l'action de G sur $G \times B(1, R)$ est par translation à gauche sur le premier facteur[(1)]. En particulier, $\mathcal{G}^1$ s'identifie à $G \times S(1, 1)$. □

[(1)] On désigne par $B(1, R)$ (respectivement $S(1, R)$) la boule (resp. la sphère) de centre 1 et de rayon R.

Nous verrons dans la suite de cet article comment étendre la proposition 1.1 à des quotients d'espaces ℓ^p dès lors que p est suffisamment proche de 1 dans le cas des groupes hyperboliques. Notons dès à présent qu'il est nécessaire de considérer des quotients des espaces ℓ^p, et non pas les espaces ℓ^p eux-mêmes, pour des p proches de 1. En effet, d'après Nowak [4], admettre une action affine isométrique propre sur un espace ℓ^p pour $1 < p < 2$ est une caractérisation de la propriété de Haagerup, et l'on sait bien que certains groupes hyperboliques ont la propriété (T) de Kazhdan (par exemple les réseaux de $\mathrm{Sp}(n,1)$ [3]).

2. Énoncé et démonstration du théorème principal

Nous rappelons la définition d'une classe d'espaces hyperboliques d'un type particulier (contenant les graphes de Cayley des groupes hyperboliques) et nous renvoyons le lecteur au paragraphe 3 de [1] pour les définitions et exemples de base à propos des espaces hyperboliques.

DÉFINITION 2.1. – *Un bon espace hyperbolique discret est un espace hyperbolique, uniformément localement fini dont la métrique provient d'une structure de graphe.*

Notons que puisque la métrique $d : X \longrightarrow \mathbf{N}$ provient d'une structure de graphe, un bon espace hyperbolique discret (X,d) est *géodésique* dans le sens que, pour tous x, y de X et tout entier k de $[\![0,\dots,d(a,b)]\!]$, il existe un élément z de X tel que $d(x,z) = k$ et $d(z,y) = d(x,y) - k$. Par ailleurs, d étant géodésique, l'uniforme locale finitude équivaut au fait que le nombre de points à distance 1 d'un élément donné de X est borné indépendamment de ce point.

Exemple fondamental. – Si Γ est un groupe hyperbolique et d la distance invariante à gauche associée à la longueur des mots pour un système fini de générateurs donné, alors (Γ, d) est un bon espace hyperbolique discret ; en outre ce dernier est muni d'une action isométrique de Γ par translation à gauche (d provient de la structure de graphe de Cayley sur Γ associée au système de générateurs donné).

Notations. – Si η est un réel positif et x, y sont deux points de l'espace métrique X, on désigne par η-géod(x,y) l'ensemble des points z de X tels que

$$d(x,z) + d(z,y) \le d(x,y) + \eta.$$

On note géod(x,y) au lieu de 0-géod(x,y) l'ensemble des points z de X tels que $d(x,z) + d(z,y) = d(x,y)$. Pour tout entier naturel n, un chemin de x à y de longueur n est la donnée d'une suite finie de points $(x_i)_{0 \le i \le n}$ de X telle que $x_0 = x$, $x_n = y$ et $d(x_i, x_{i+1}) = 1$ pour tout i dans $[\![0, n-1]\!]$; si de plus $x_0 = x_n$, nous appellerons un tel chemin un *lacet*. Enfin, convenons d'appeler *arêtes orientées* les éléments de $X^1 = \{(x,y) \in X \times X ; d(x,y) = 1\}$; on désigne par e^- le sommet origine x d'une telle arête $e = (x,y)$ de X^1, par e^+ son sommet terminal y et par $e^{\mathrm{op}} = (y,x)$ l'arête opposée.

Nous énonçons à présent le théorème principal de cet article.