Revue d'histoire des mathématiques
25 (2019), p. 1–107

L'ALGÈBRE SANS LES « FICTIONS DES RACINES » : KRONECKER ET LA THÉORIE DES CARACTÉRISTIQUES DANS LES *VORLESUNGEN ÜBER DIE ALGEBRAISCHEN GLEICHUNGEN*

Cédric Vergnerie

Résumé. — Durant la seconde moitié du dix-neuvième siècle, Leopold Kronecker a donné un cours sur la théorie des équations algébriques, qui constitue ses leçons d'*algèbre*. Dans ces *Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Gleichungen*, il demande à l'algèbre d'être rendue « autant que possible indépendant[e] de toutes les fictions sur les racines des équations ». Nous allons montrer comment Kronecker, dans le contexte de la théorie des caractéristiques – une généralisation du théorème de Sturm –, aborde le concept de continuité et comment, dans sa pratique, la notion même de racine est interrogée.

Abstract (Algebra without "all the fictions about the roots of equations": the theory of characteristics in Kronecker's *Vorlesungen über die algebraischen Gleichungen*)

For the better part of the second half of the nineteenth century, Leopold Kronecker gave a course on the theory of algebraic equations, which represents his *Algebra* lectures. In this *Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Gleichungen*, he asked Algebra to be "as far as possible independent from all the fictions about the roots of equations". We will show how Kronecker, in the context of the theory of characteristics—a generalization of Sturm's theorem—, dealt with the concept of continuity and how, in his practice, the very notion of root is questioned.

Texte reçu le 2 juillet 2018, accepté le 3 novembre 2018, révisé le 26 décembre 2018.

C. Vergnerie, Université Paris Diderot – CNRS, Laboratoire SPHERE, UMR 7219, bâtiment Condorcet, case 7093, 5 rue Thomas Mann, 75205 Paris cedex 13, France.
Courrier électronique : `cedric.vergnerie@gmail.com`

Classification mathématique par sujets (2000) : 01A55.

Mots clefs : Kronecker, Sturm, Gauss, Équation, Théorème fondamental de l'algèbre, histoire de l'algèbre, théorie des caractéristiques, continuité, racines.

Key words and phrases. — Kronecker, Sturm, Gauss, Equation, Fondamental theorem of algebra, history of algebra, theory of characteristics, continuity, roots.

1. INTRODUCTION

Dans un cours qu'il donne en 1891 à l'université de Berlin, Leopold Kronecker affirme que les « résultats de l'algèbre doivent être rendus autant que possible indépendants de toutes les fictions sur les racines des équations [Kronecker 1891, p. 10] ». C'est ainsi que, dès l'introduction de ses *Leçons sur la théorie des équations algébriques*[1], dans lesquelles on peut imaginer qu'une place importante sera réservée aux solutions de ces équations, Kronecker met en garde son auditoire sur la notion de « racines ». Cette réserve à propos d'une notion aussi fondamentale dans la théorie des équations va avoir des conséquences sur un certain nombre d'autres concepts, comme celui de continuité : ce dernier est en effet habituellement lié – par exemple chez Gauss ou Bolzano – à l'existence d'une racine réelle pour tout polynôme de degré impair.

Si les grands principes philosophiques de Kronecker sur les mathématiques influencent très certainement sa pratique, nous souhaitons ici examiner aussi comment cette dernière rend nécessaire la modification de certains concepts. Ainsi, l'étude de la controverse entre Kronecker et Camille Jordan sur la théorie des formes a permis à Frédéric Brechenmacher de mettre en évidence l'intrication entre la pratique et la pensée mathématique dans le travail de Kronecker. Il montre que la « nature arithmétique » de la théorie des formes amène Kronecker à privilégier des méthodes telles que le calcul de p.g.c.d dans le traitement de ces formes [Brechenmacher 2007]. La conception qu'il se fait des racines d'une équation intervient d'ailleurs dans cette controverse : l'un des arguments de Kronecker à l'encontre du critère de réduction de Jordan est la nécessité d'extraire toutes les racines d'un polynôme, ce qui en général ne peut être réalisé de façon effective. De même, l'étude de la réception de Gauss dans [Goldstein & Schappacher 2007a] et [Goldstein & Schappacher 2007b] est l'occasion pour Catherine Goldstein et Norbert Schappacher de préciser la conception des mathématiques de Kronecker. Notre propos est donc de montrer *in situ*, c'est-à-dire dans la pratique même de Kronecker, comment ce dernier est amené à mobiliser et à transformer l'idée de racine. Pour cela, nous utiliserons les cours sur la théorie des équations algébriques qu'il a professés entre 1872 et 1891, année de sa mort. Ces leçons, contrairement à celles que Kronecker a données sur l'intégration, les déterminants ou l'arithmétique, n'ont pas été publiées. Nous y avons accès uniquement par

[1] *Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Gleichungen.* Sauf mention contraire, les traductions proposées des textes en allemand sont les nôtres.

des manuscrits, issus pour la plupart du fonds Hensel et conservés à la bibliothèque de mathématiques de l'IRMA à Strasbourg. Ces manuscrits, qui sont en fait des mises en forme de notes prises par des étudiants, n'ont été pour le moment que rarement exploités : nous les utiliserons dans cet article comme source principale. Dans ses cours, notoirement difficiles et adressés à de jeunes mathématiciens en devenir, Kronecker présente ses recherches les plus récentes : il s'agit d'un matériel privilégié pour voir comment le mathématicien berlinois *fait* des mathématiques. Pierre Dugac a utilisé les cours que Weierstrass avait donnés à Berlin durant la même période pour en « dégager quelques notions essentielles », « en chercher l'origine » et en « suivre [l'] évolution et [les] transformations » [Dugac 1973, p. 43]. Il y montrait l'usage pertinent que l'on peut faire de ces leçons pour étudier la conception des mathématiques de Weierstrass. Nous nous proposons finalement de procéder ici de la même façon avec les cours de Kronecker.

Jules Molk, dans le traité qu'il consacre à la théorie de la divisibilité de Kronecker, affirme :

> Il faut, en un mot, montrer ce que l'on doit entendre par racine d'une équation algébrique, au point de vue arithmétique auquel nous nous sommes placés.
> Mais ces considérations m'écarteraient par trop de l'objet que j'ai principalement en vue. Elles rentrent dans un autre ordre d'idées et il convient de les exposer avec la théorie des *Caractéristiques* [Molk 1884, p. 5].

Dans les leçons de Kronecker, le lieu où ces notions de racine et de continuité semblent se cristalliser est le chapitre qu'il consacre au théorème de Sturm et dans lequel, en effet, il développe la *théorie des caractéristiques*. Cette dernière – fruit d'une volonté de généraliser le théorème de Sturm – n'a été que très rarement exposée, et presque toujours à partir de relectures qu'en ont faites des mathématiciens à la fin du XIX^{e} siècle. Dans son histoire du théorème de Sturm, Hourya Sinaceur remarque que :

> Du côté de la recherche, [*le théorème de Sturm*] ne resta pas (...) lettre morte. Il fut suivi, en effet, par toute une série de mémoires ou d'articles visant à l'améliorer ou le transformer de la plume des plus grands mathématiciens comme Sylvester, Cayley, Hermite ou Kronecker, et aussi de moins grands comme Borchardt ou Darboux. Il engendra ainsi ce que Sylvester a appelé "un cycle d'idées sturmiennes". Ce cycle s'acheva pourtant, sinon avec les travaux de Sylvester comme celui-ci voulait bien le croire, du moins avec la difficile théorie des caractéristiques de Kronecker [Sinaceur 1988, p. 103].

La théorie des caractéristiques – qui d'après H. Sinaceur clôture le « cycle d'idées sturmiennes »[2] – est le cadre dans lequel Kronecker donne une première démonstration du théorème fondamental de l'algèbre, théorème dont il dit qu'il est « le plus important de cette première partie, on pourrait presque dire (...) le seul théorème de la théorie des équations algébriques »[3]. Dans un article publié en 1991, Christian Gilain [Gilain 1991] réécrit l'histoire du théorème fondamental de l'algèbre en remplaçant sa description ternaire usuelle[4], *conjecture – essai de preuve – preuve,* par une distinction entre deux théorèmes : le théorème fondamental de l'algèbre et le théorème de factorisation linéaire[5], c'est-à-dire entre l'existence d'un corps de décomposition d'un polynôme, et donc la *possibilité* de le factoriser dans ce corps par un produit de facteurs simples, et le fait que tout polynôme de $\mathbb{C}[x]$ admette une racine complexe. Il s'agit là d'une différence fondamentale entre la preuve de l'existence de racines d'un polynôme et la détermination de la nature de celles-ci pour un polynôme à coefficients réels. Il y a deux théorèmes, et donc deux histoires distinctes. À propos de la place de Kronecker dans ces histoires, Gilain affirme :

> Chez KRONECKER, la théorie des équations algébriques apparait unifiée sur la base de son théorème, désigné comme théorème fondamental de l'arithmétique générale et qui est une forme du TFL. L'énoncé classique du TFA est d'ailleurs, lui, écarté par KRONECKER qui, voulant fonder la théorie sur la seule base des nombres rationnels et des constructions finies à partir d'eux, est conduit à restreindre le champ des coefficients des équations et à modifier l'énoncé du problème de l'existence des racines [Gilain 1991, p. 128].

Pourtant, cet « important » théorème est introduit lors de la première partie du cours de Kronecker, dans laquelle les outils pour construire le TFL n'ont pas encore été mis en place. En utilisant les manuscrits de ses cours sur la théorie des équations algébriques, nous allons examiner le cadre dans lequel ce théorème est présenté. Plus particulièrement, à travers l'articulation entre théorème de Sturm, théorie des caractéristiques et théorème fondamental de l'algèbre, nous examinerons la façon dont Kronecker transforme le concept de *racines*, pour finalement s'attacher à leur *séparation.*

---

2 Hourya Sinaceur reprend ici une expression utilisée par Sylvester dans [Sylvester 1853, p. 486] : « the cycle of Sturmian ideas ».

3 [Kronecker 1891, p. 268] : (...) *für diesen ersten Teil des wichtigsten, ja, man könnte fast behaupten, einzigen Theorems der Lehre von den algebraischen Gleichungen* (...).

4 Pour une histoire détaillée de ce théorème, voir [Gilain 1991], [Remmert 1991], [Petrova 1973] ou [Dhombres & Alvarez 2011] et [Dhombres & Alvarez 2013].

5 TFA et TFL pour reprendre les abréviations de C. Gilain.

2. PRÉSENTATION DES *VORLESUNGEN ÜBER DIE THEORIE DER ALGEBRAISCHEN GLEICHUNGEN*

Dans une lettre à son professeur Hjalmar Holmgren, Gösta Mittag-Leffler[6] décrit les enseignements qu'il a suivis à Berlin[7] :

> D'un point de vue scientifique, je suis très satisfait de mon séjour à Berlin. Nulle part je n'ai trouvé autant de choses à apprendre qu'ici. Weierstraß et Kronecker ont tous deux cette particularité, inhabituelle en Allemagne, d'éviter autant que possible les publications imprimées. Il est connu que Weierstraß ne publie presque rien, et Kronecker seulement des résultats sans démonstration.
>
> Les résultats de leurs recherches sont présentés dans leurs leçons. Les mathématiques de notre temps n'ont pas grand-chose qui puisse rivaliser avec la théorie des fonctions de Weierstraß ou l'algèbre de Kronecker. (...)
>
> Autant Weierstraß que Kronecker s'illustrent d'ailleurs par la plus complète clarté et la précision de leurs démonstrations. Ils ont tous deux hérité de Gauss la crainte de tout genre de métaphysique dans la fixation des concepts fondamentaux des mathématiques, et cela donne à leurs démonstrations une simplicité et un naturel que l'on a rarement vus conduits de façon aussi systématique avec un si grand degré de précision [Behnke & Kopfermann 1966, p. 54].

Mittag-Leffler met l'accent sur la nécessité d'avoir accès aux cours de Weierstrass et de Kronecker pour comprendre le contenu de leurs recherches, car leurs articles publiés sont rares ou ne comportent qu'une suite de résultats sans démonstration. Si ces cours se caractérisent, pour Mittag-Leffler, par une grande clarté, Harold Edwards a une opinion différente des travaux publiés par Kronecker :

---

6 Gösta Mittag-Leffler (1846-1927), qui créa et dirigea les célèbres *Acta Mathematica*, obtient sa thèse, dont le sujet a trait à l'analyse complexe, en 1872 à Upsalla. Ce n'est qu'ensuite, en 1875, après avoir passé quelques temps à Paris, qu'il décide, sur les conseils d'Hermite, de suivre les cours de Weierstraß à Berlin.

7 Lettre du 16 février 1875 traduite en allemand du suédois dans [Behnke & Kopfermann 1966, p. 54] : Mit meinen Aufenthalt in Berlin bin ich in wissenschaftlicher Hinsicht sehr zufrieden. Nirgends habe ich so vieles zu lernen gefunden wie hier. Weierstraß und Kronecker haben beide die in Deutschland ungewöhnliche Eigenschaft, gedruckte Publikationen, soweit es möglich ist, zu vermeiden. Weierstraß publiziert bekanntlich gar nicht, und Kronecker nur Resultate ohne Beweise.

In ihren Vorlesungen legen sie die Resultate ihrer Forschungen vor. Kaum dürfte wohl die Mathematik unserer Tage etwas aufzuweisen haben, was mit der Funktionentheorie von Weierstraß oder der Algebra von Kronecker wetteifern kann. (...)

Sowohl Weierstraß als auch Kronecker zeichnen sich übrigens durch vollständigste Klarheit und Schärfe beim Beweisen aus. Zugleich haben sie von Gauss die Furcht vor aller Art Metaphysik bei der Fixierung der mathematischen Grundbegriffe geerbt, und dies gibt ihren Deduktionen eine Einfachheit und Natürlichkeit, die man wohl kaum früher so systematisch ausgeführt und mit dem höchsten Grad an Schärfe gesehen hat.