

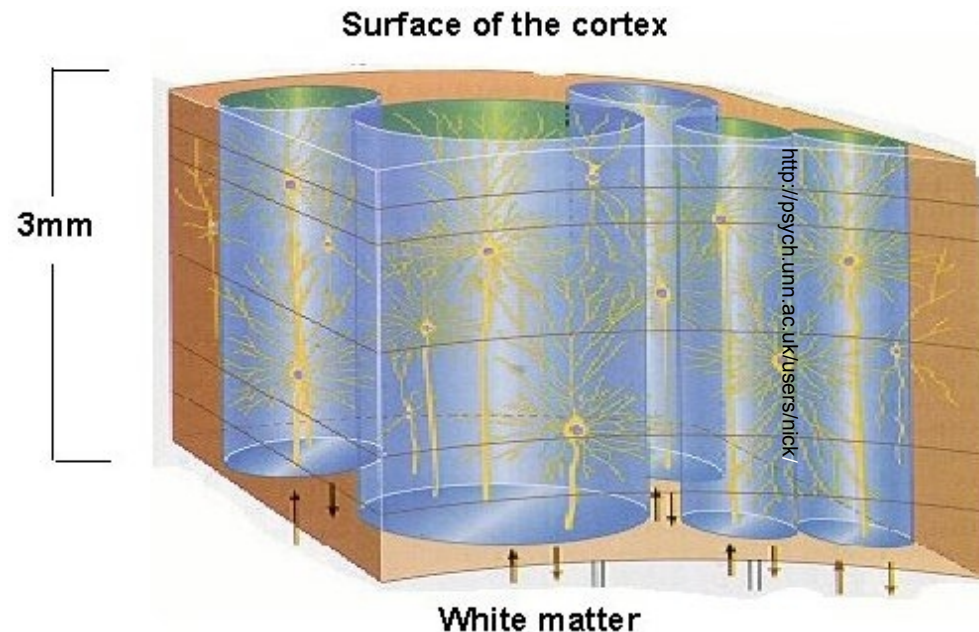
Les équations des champs neuronaux et les bifurcations de leurs solutions

Olivier Faugeras

- L’“efficacité déraisonnable des mathématiques” en physique **E. Wigner, 1960**) n’a pas encore son équivalent en neurosciences et en biologie en général.
- Inversement, rares sont les problèmes mathématiques nouveaux posés par ces disciplines qui sont étudiés par des mathématiciens.

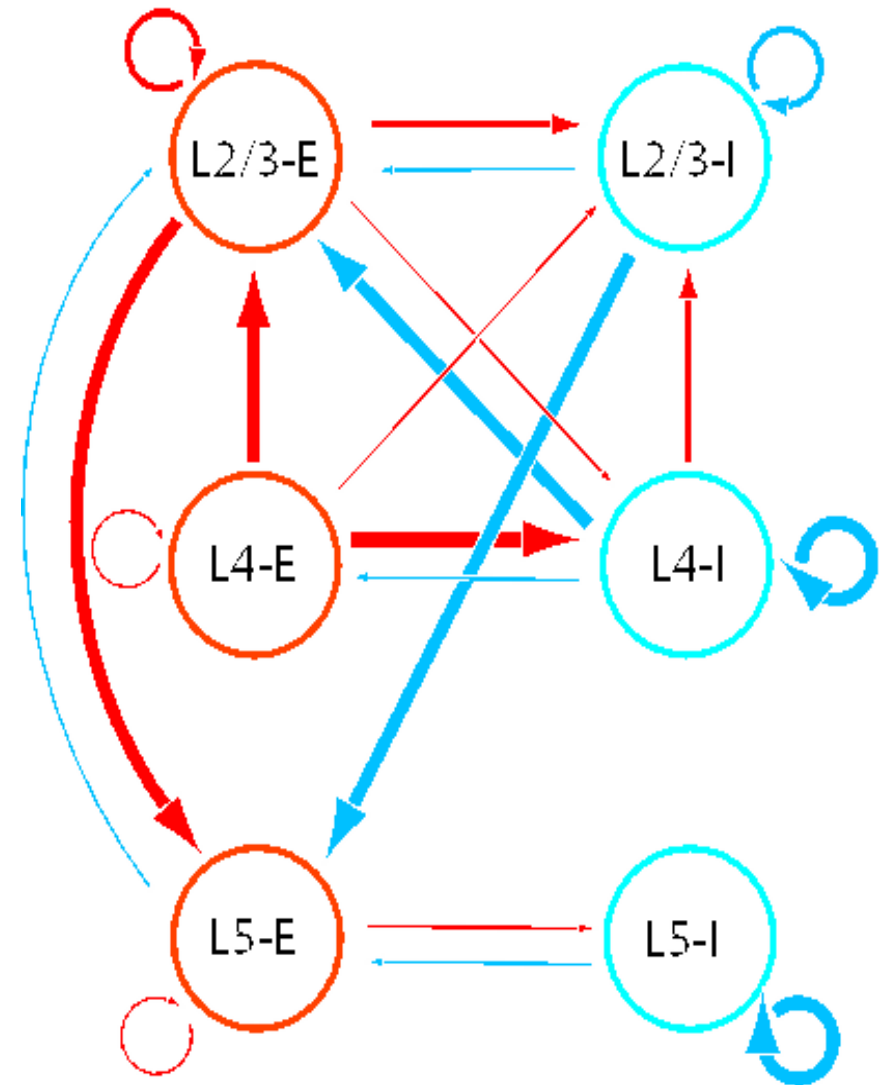
Modélisation mésososcopique : les colonnes corticales

- Un petit cylindre traversant le cortex, diamètre 0.1-1 mm, contenant environ $10^4 - 10^5$ neurones fortement connecté qui s'activent ensemble.



Exemple de modèle de colonne (masses neurales)

Six populations neurales :

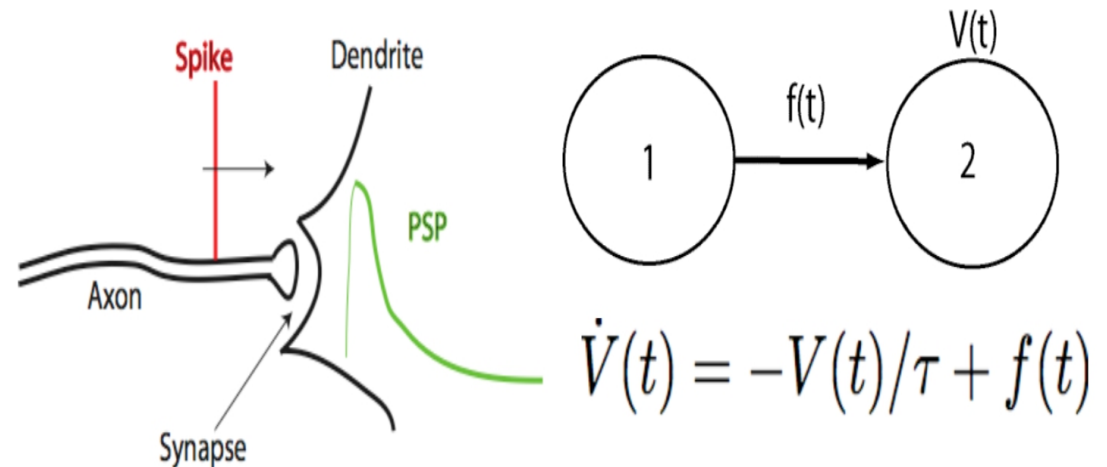


Masse neurale (suite)

- Les équations :

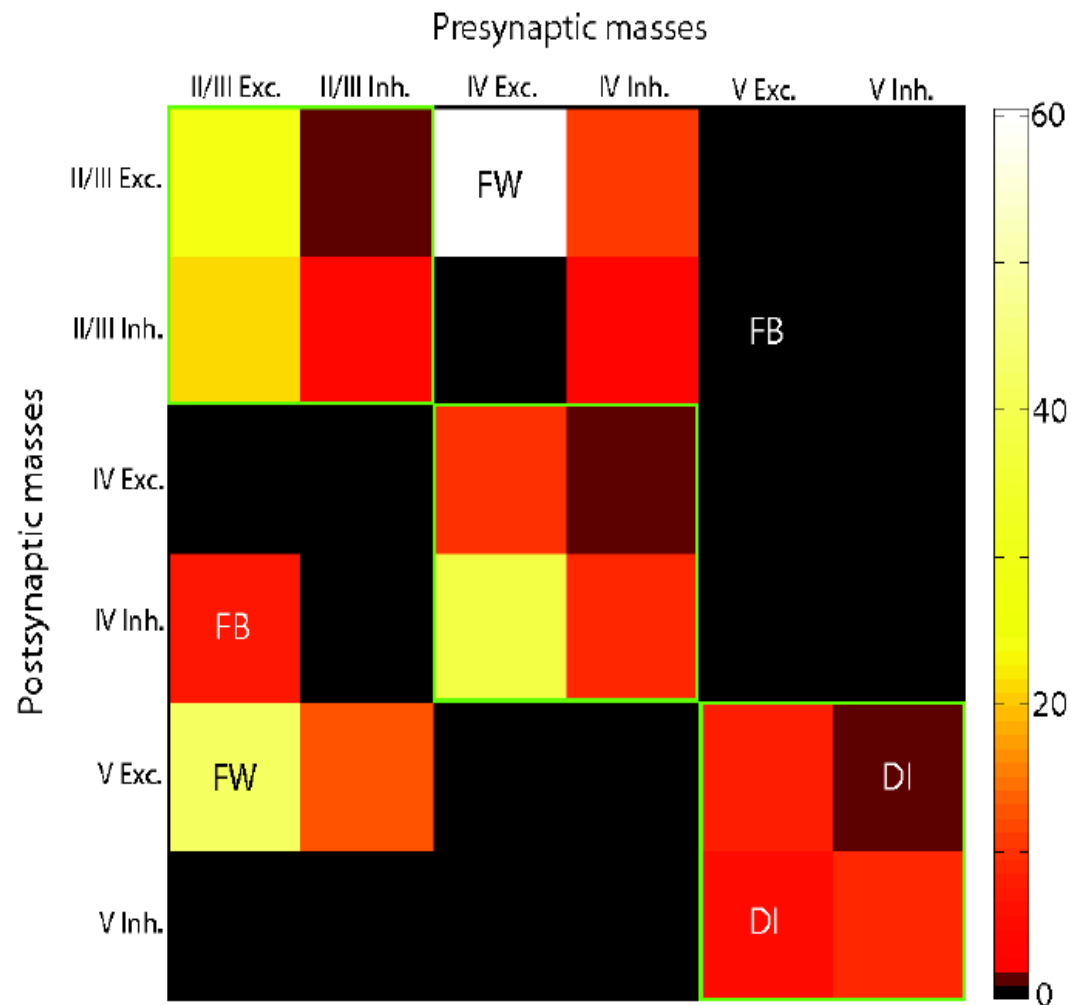
$$\dot{\mathbf{V}} = -\mathbf{L}\mathbf{V} + \mathbf{J}\mathbf{S}(\mathbf{V}) + \mathbf{I}_{\text{ext}}$$

- $\mathbf{L}$ décrit la dynamique du potentiel de membrane



- $\mathbf{J}$ est la connectivité

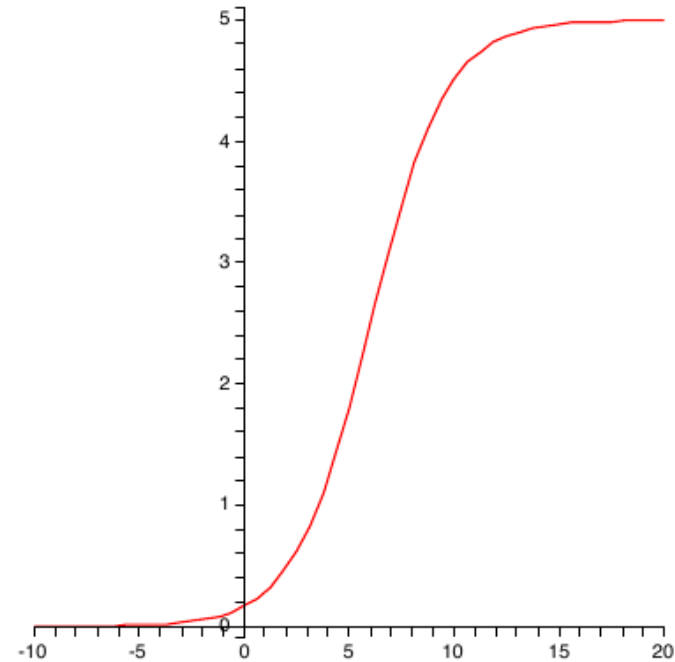
J décrit l'intensité des connections



Adapté de Hauesler-Mass 2007

La nonlinéarité S

$$S(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

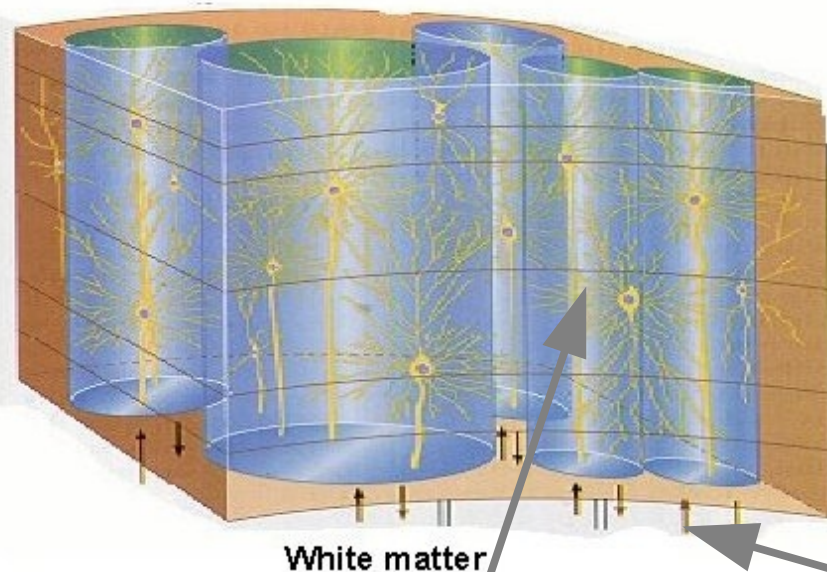


- Prend ses valeurs dans (0,1) $S(\sigma(x - \theta))$
- La pente en $x = \theta$ est proportionnelle à σ

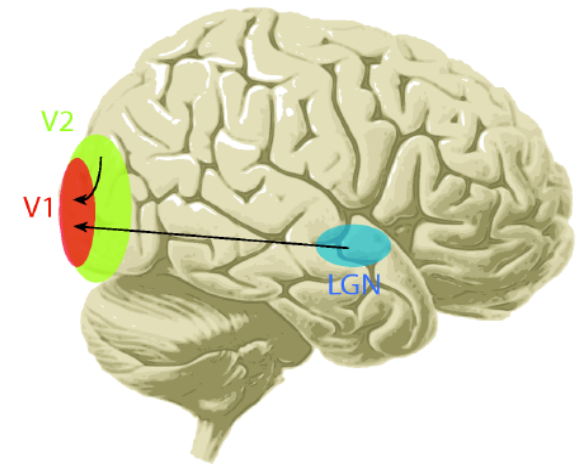
Un continuum spatial de colonnes corticales

Surface of the cortex

3mm



Freeman, Wilson & Cowan
Fredholm, Hammerstein



$$\mathbf{V}_t(\mathbf{r}, t) = -\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) + \int_{\Omega} \mathbf{J}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) \mathbf{S}(\sigma \mathbf{V}(\mathbf{r}', t)) d\mathbf{r}' + \mathbf{I}_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t)$$

dynamique
synaptique

Noyau de
connectivité

activité

Entrée des fibres
de matière blanche
(Thalamus,...)

Forme fonctionnelle

- On définit $\mathcal{F} = L^2(\Omega)$ puis

$$\begin{cases} \mathbf{V}_t(\mathbf{r}, t) &= -\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) + [\mathbf{J}(t) \cdot \mathbf{S}(\sigma \mathbf{V}(t))] (\mathbf{r}) + \mathbf{I}_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t) \\ \mathbf{V}(\cdot, 0) &= \mathbf{V}_0(\cdot) \end{cases}$$

- $\mathbf{J}(t)$ est un opérateur linéaire de $\mathcal{F}$ dans lui-même :

$$[\mathbf{J}(t) \cdot \mathbf{V}(t)](\mathbf{r}) = \int_{\Omega} \mathbf{J}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) \mathbf{V}(\mathbf{r}', t) d\mathbf{r}'$$

- $\mathbf{I}_{\text{ext}}(\cdot, t)$ est dans $\mathcal{F}$ pour tout t positif

Forme fonctionnelle

- On définit l'opérateur non linéaire :

$$\mathbf{R}(t, \mathbf{V}) = \mathbf{J}(t) \cdot \mathbf{S}(\sigma \mathbf{V}) + \mathbf{I}_{\text{ext}}(t)$$

- Sous les hypothèses

$$\mathbf{J} \in C(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega \times \Omega)) \text{ and } \mathbf{I}_{\text{ext}} \in C(\mathbb{R}^+, \mathcal{F})$$

- Alors

$\forall \mathbf{V}_0 \in \mathcal{F}, \quad \exists!$ solution à l'équation des champs neuronaux

Pourquoi : $\mathbf{R}$ est continu et Lipschitz continu par rapport à son second argument et on peut appliquer Cauchy-Lipschitz.

Propriétés des solutions

- Si le courant extérieur est borné

$$\|\mathbf{I}_{\text{ext}}(t)\|_{\mathcal{F}} \leq I_{\text{ext}}$$

- Alors la solution des équations de champ neuronal est bornée pour toute condition initiale dans $\mathcal{F}$

Les solutions stationnaires

- États persistants (la connectivité et le courant extérieur ne dépendent pas du temps)

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \int_{\Omega} \mathbf{J}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{S}(\sigma \mathbf{V}(\mathbf{r}')) d\mathbf{r}' + \mathbf{I}_{\text{ext}}(\mathbf{r})$$

- Si la connectivité est symétrique, la dynamique est décrite par des orbites hétéroclines entre ces solutions.
- Ce sont de bons candidats pour des modèles de mémorisation.

Existence de solutions stationnaires

- Sous les hypothèses

$$\mathbf{J} \in L^2(\Omega \times \Omega) \text{ et } \mathbf{I}_{\text{ext}} \in L^2(\Omega)$$

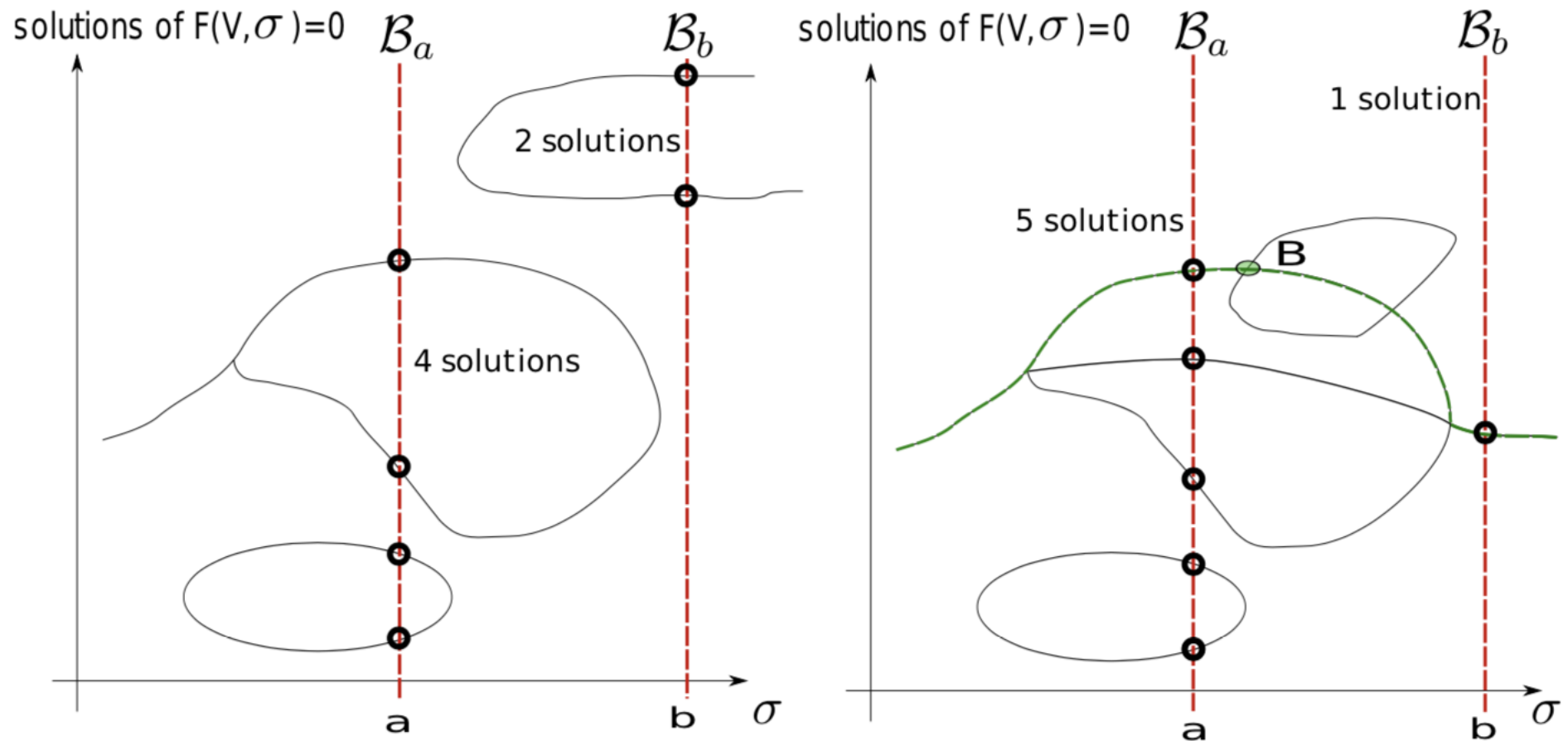
- Il existe au moins une solution stationnaire.

Pourquoi : Le membre de droite définit un opérateur compact et on applique le théorème du point fixe de Schaeffer

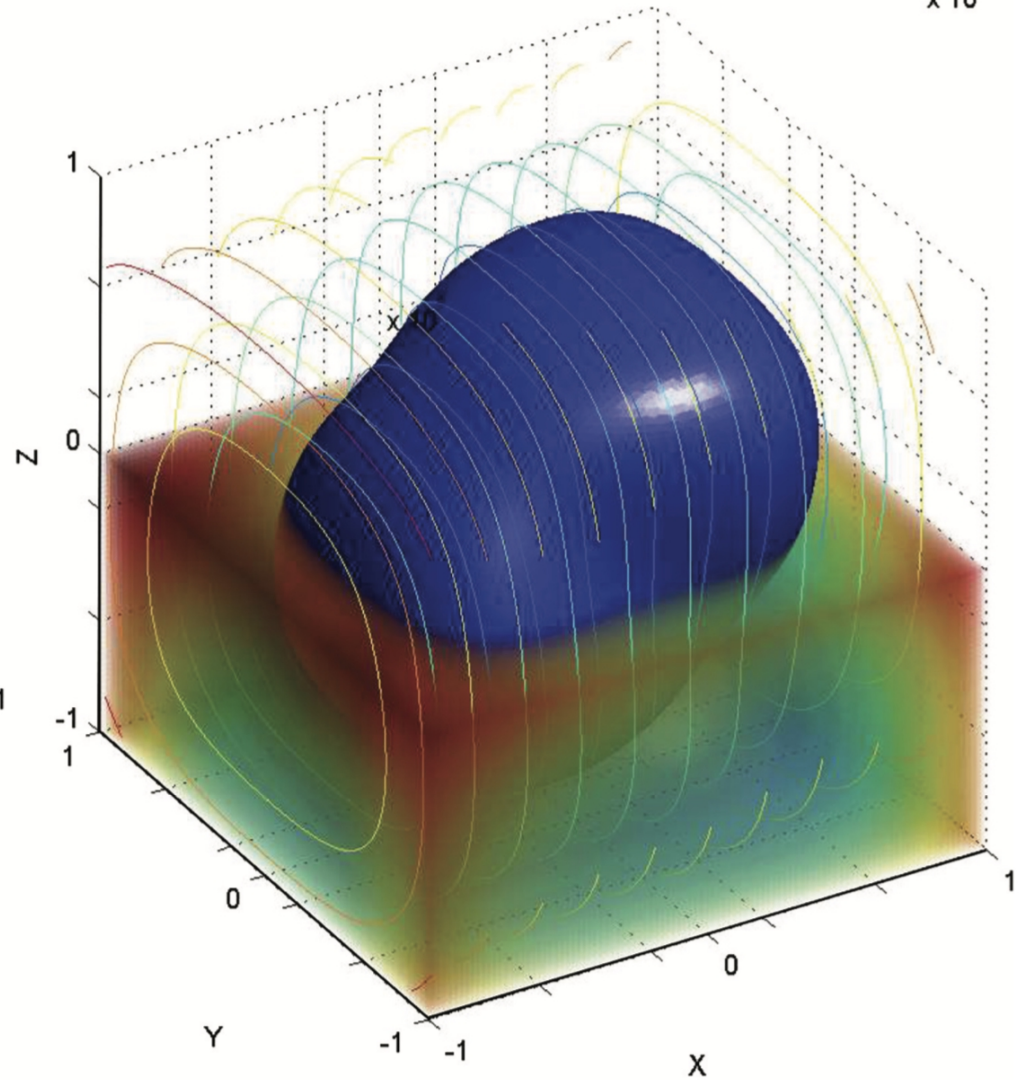
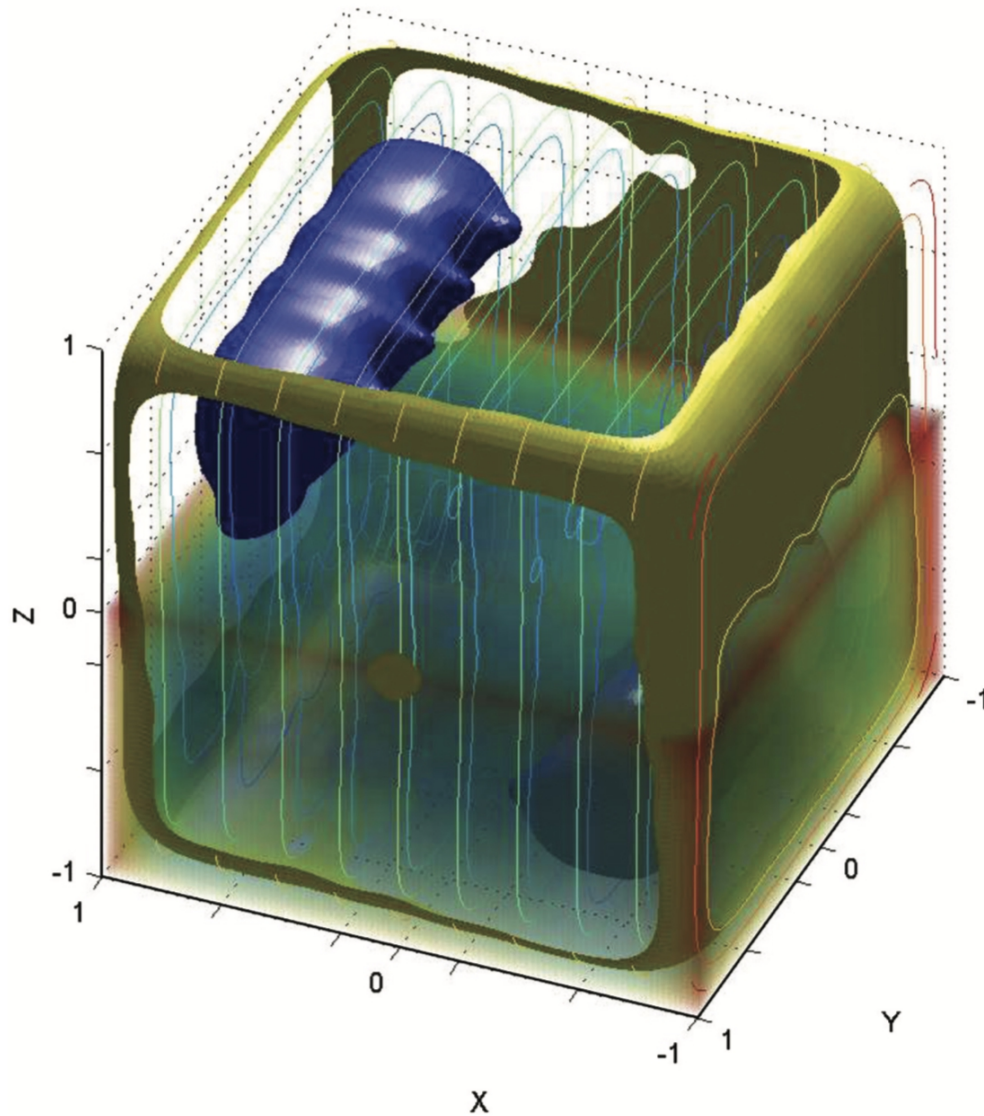
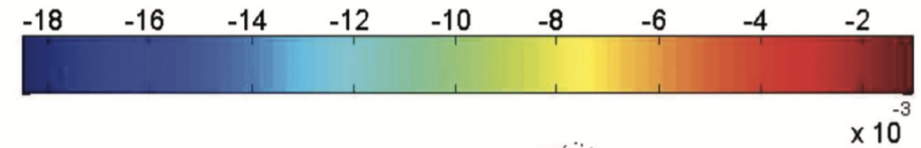
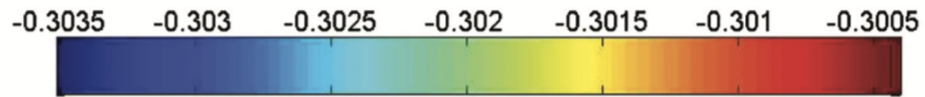
Quelques propriétés

- On s'intéresse à l'ensemble $\mathcal{B}_\sigma$ des solutions stationnaires quand σ varie.
- Quelques propriétés :
 - Ensemble borné
 - Si le nombre de solutions est fini, alors il est impair.

Illustration graphique



Un état stationnaire en dimension 3



Bifurcation des solutions des équations de CN

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \int_{\Omega} \mathbf{J}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{S}(\sigma \mathbf{V}(\mathbf{r}')) d\mathbf{r}' + \mathbf{I}_{\text{ext}}(\mathbf{r})$$

- Supposons $\mathbf{S}(0) = 0$
- le signal d'entrée nul, et σ petit.
- L'équation des CN admet une solution unique (nulle), stationnaire en temps, équilibre stable.
- Lorsqu'on augmente la pente la solution va bifurquer.

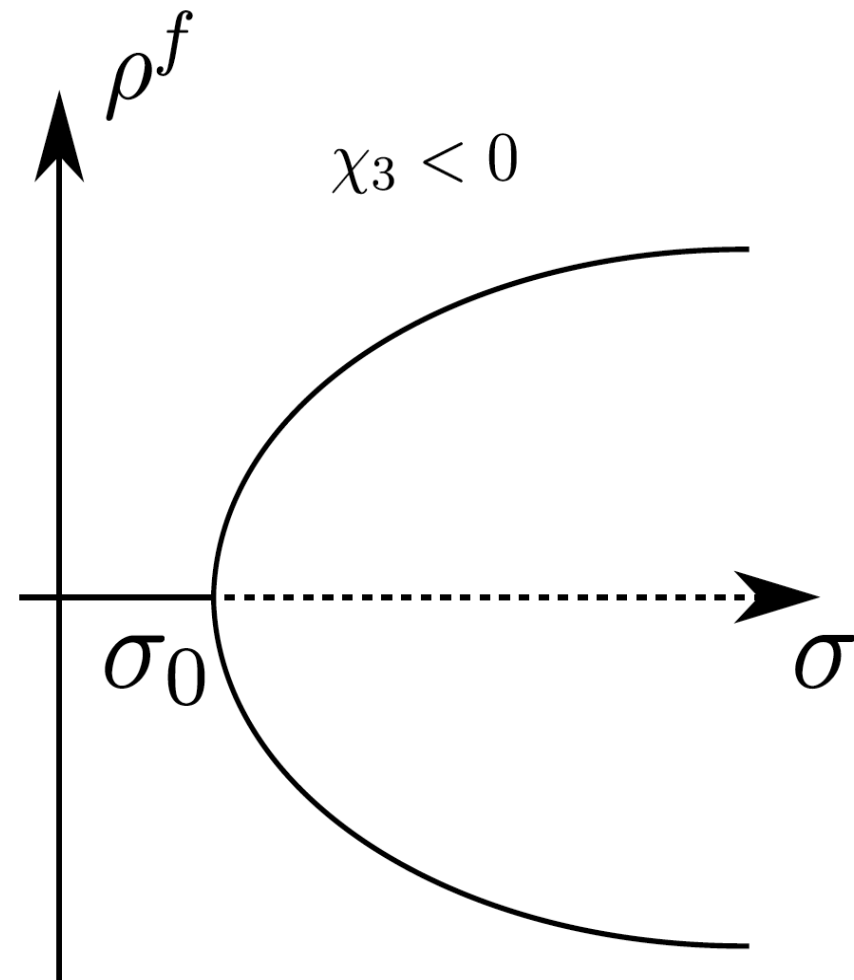
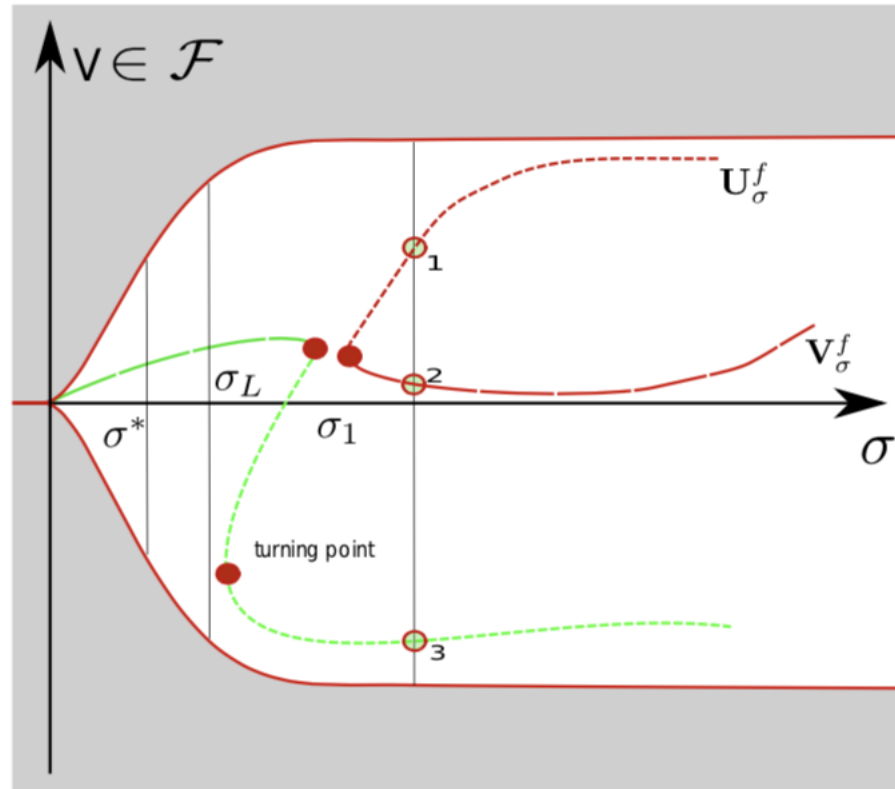
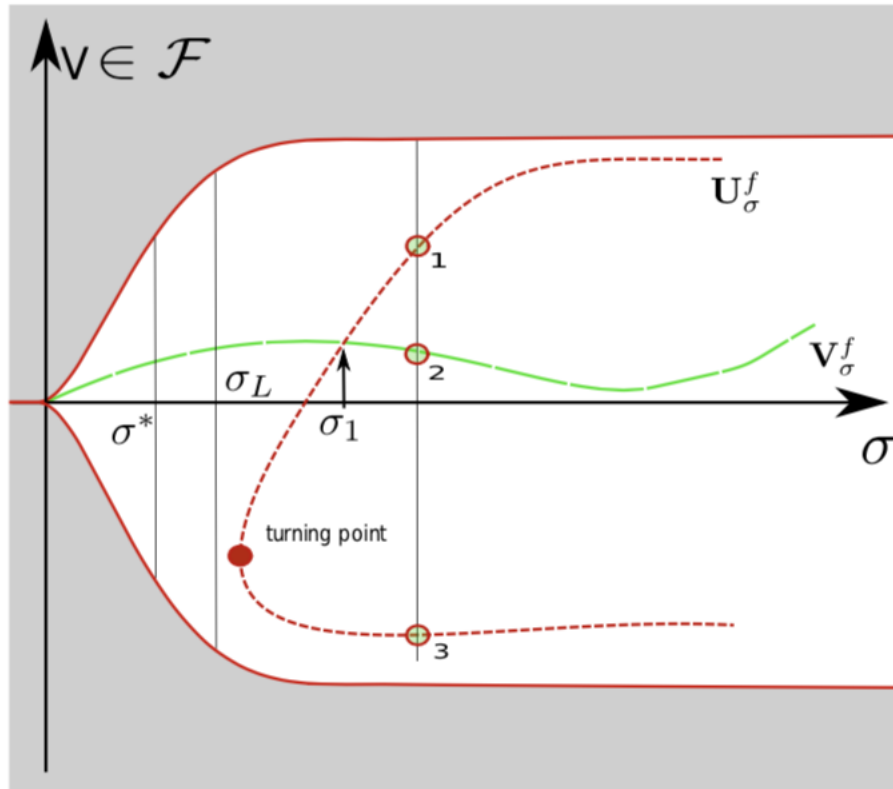


Illustration graphique



Illusions

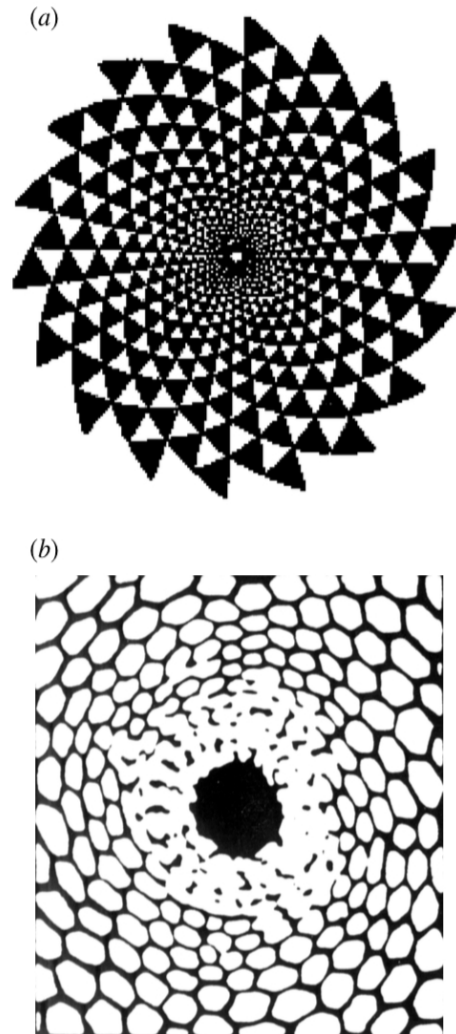
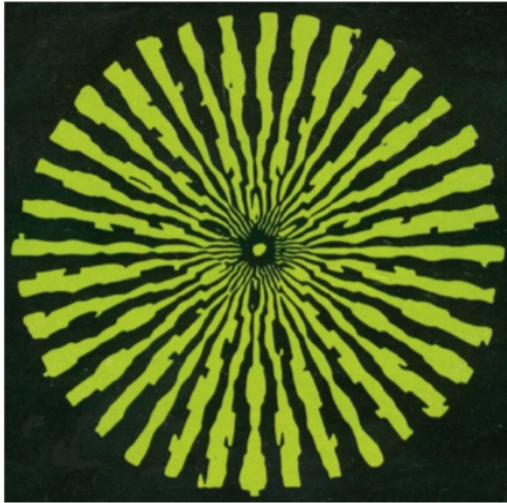


Figure 4. Cobweb petroglyph. Redrawn from Patterson (1992).

Figure 1. (a) 'Phosphene' produced by deep binocular pressure on the eyeballs. Redrawn from Tyler (1978). (b) Honeycomb hallucination generated by marijuana. Redrawn from Clottes & Lewis-Williams (1998).

Illusions

(a)



(b)

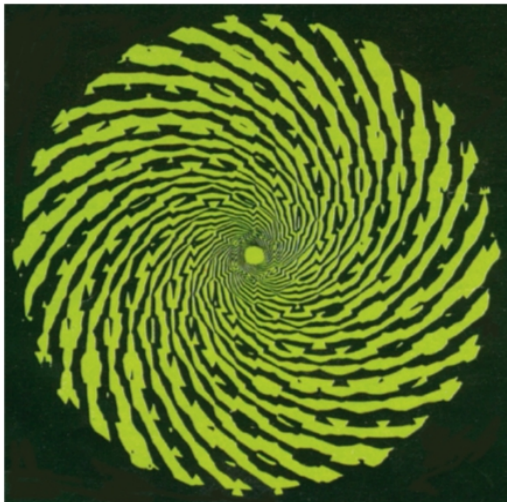
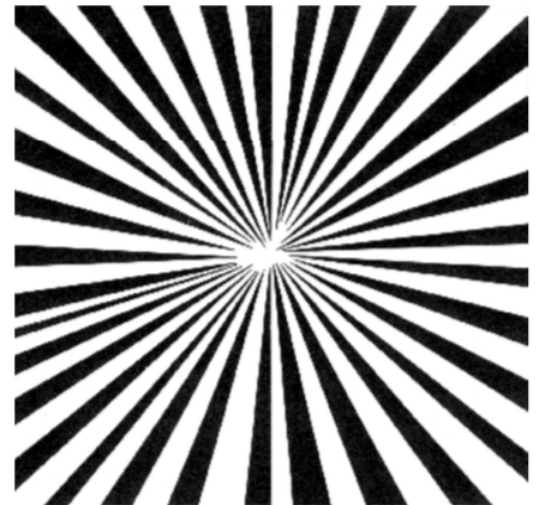


Figure 2. (a) Funnel and (b) spiral hallucinations generated by LSD. Redrawn from Oster (1970).

(a)



(b)

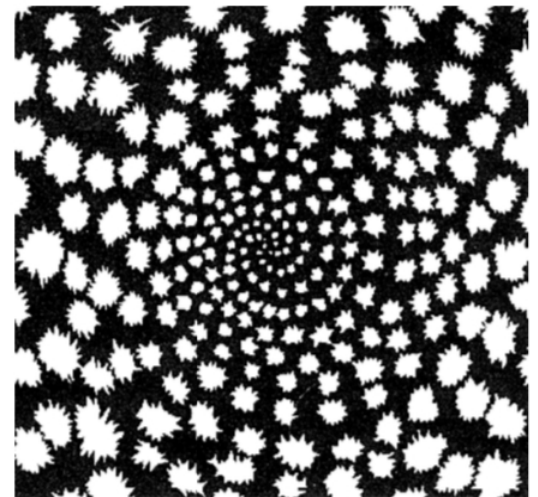


Figure 3. (a) Funnel and (b) spiral tunnel hallucinations generated by LSD. Redrawn from Siegel (1977).

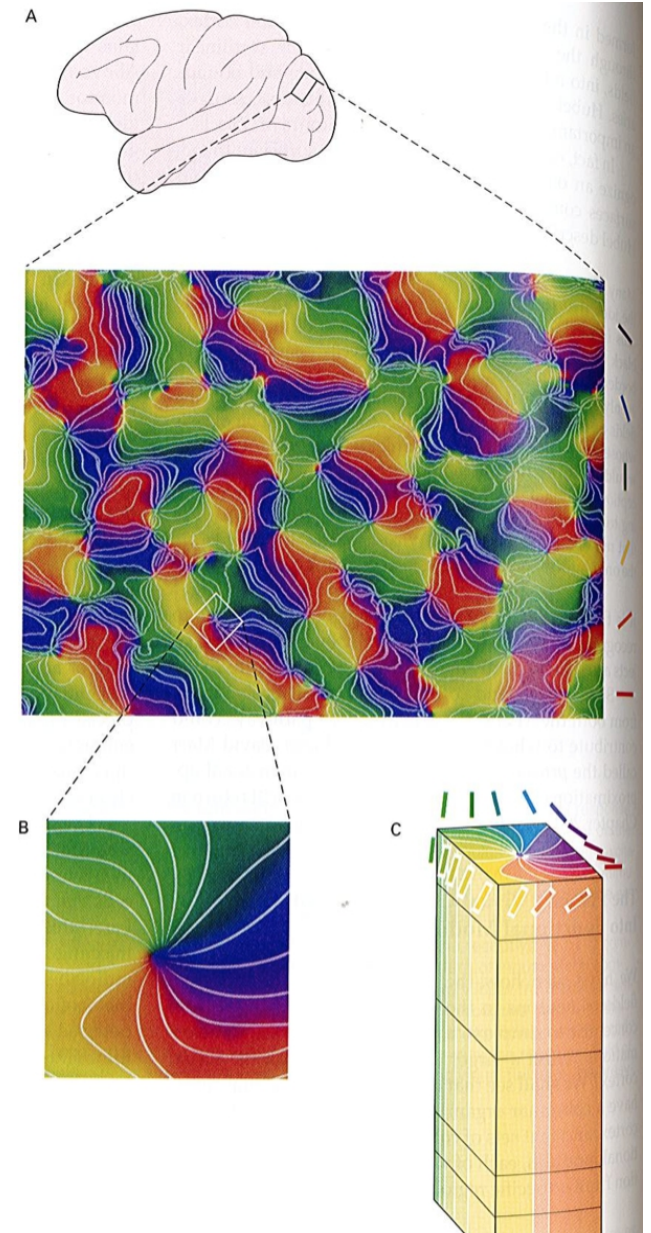
Prise en compte de l'orientation des contours

- En chaque point du cortex existe une représentation de l'orientation du contour au point correspondant de la rétine.
- On représente le cortex comme $\Omega \times [0, \pi)$ en fait $\mathbb{R}^2 \times [0, \pi)$
- Le potentiel de membrane est fonction de la position et de l'orientation.

$$\mathbf{V}_t(\mathbf{r}, \phi, t) = -\mathbf{V}(\mathbf{r}, \phi, t) + \mu \int_{\Omega \times [0, \pi)} \mathbf{J}(\mathbf{r}, \phi | \mathbf{r}', \phi', t) \mathbf{S}(\sigma \mathbf{V}(\mathbf{r}', \phi', t)) d\mathbf{r}' \frac{d\phi'}{\pi} + \mathbf{I}_{\text{ext}}(\mathbf{r}, \phi, t)$$

Sensibilité à l'orientation

- Organisation en colonnes
- de la sensibilité à l'orientation :
- **Principles of Neural Science, E. Kandel, J. Schwartz, T. Jessel, 4th Edition, 2000**



Structure de la connectivité

- La structure des connections latérales de V1 est reflétée dans celle de $\mathbf{J}$:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, \phi | \mathbf{r}', \phi') = \mathbf{J}_{\text{loc}}(\mathbf{r}, \phi | \mathbf{r}', \phi') + \varepsilon \mathbf{J}_{\text{LD}}(\mathbf{r}, \phi | \mathbf{r}', \phi') \quad \varepsilon \ll 1$$

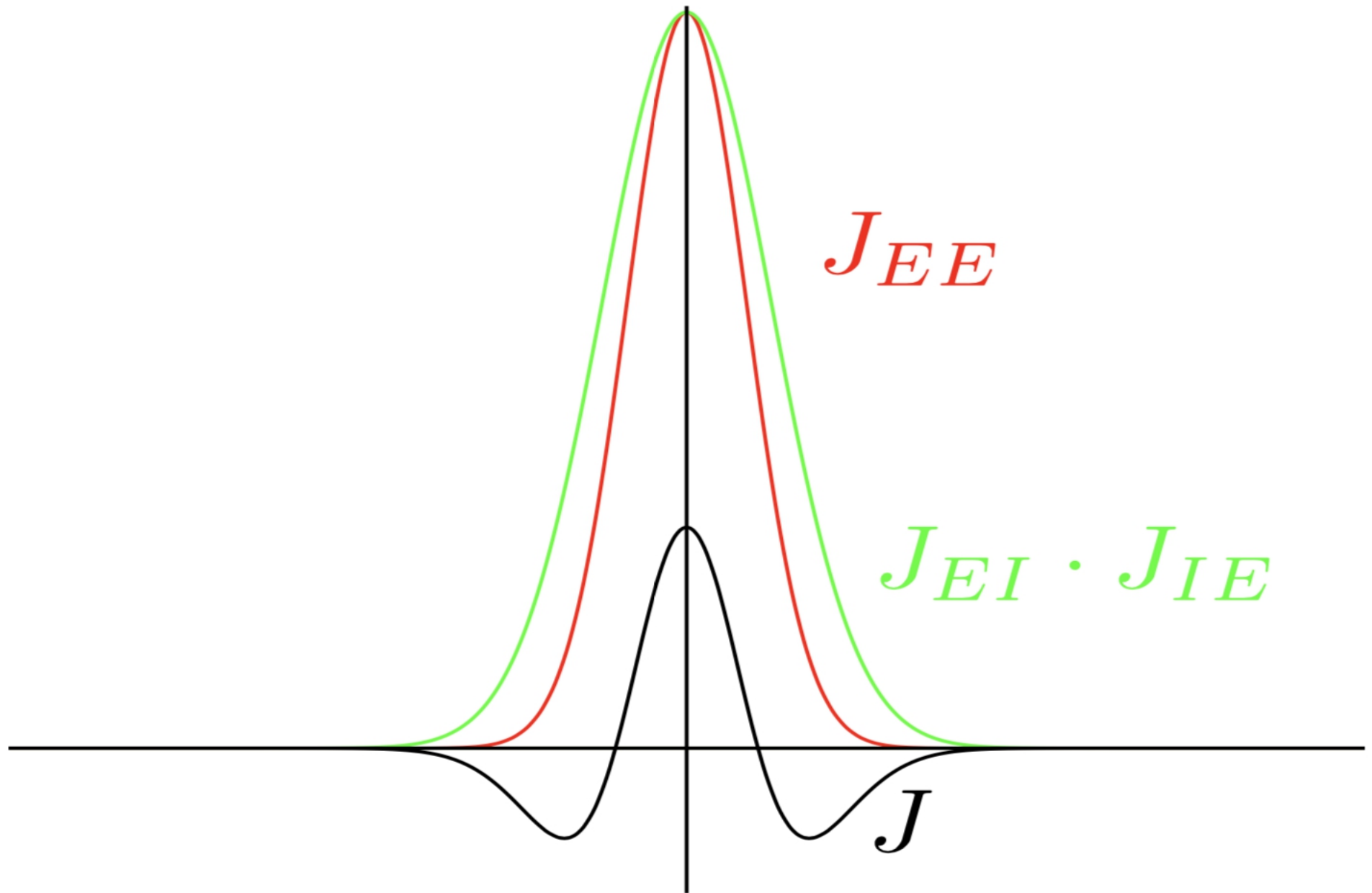
- Les connections locales

$$\mathbf{J}_{\text{loc}}(\mathbf{r}, \phi | \mathbf{r}', \phi') := \mathbf{J}_{1,\text{loc}}(\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|) \mathbf{J}_{2,\text{loc}}(\phi - \phi')$$

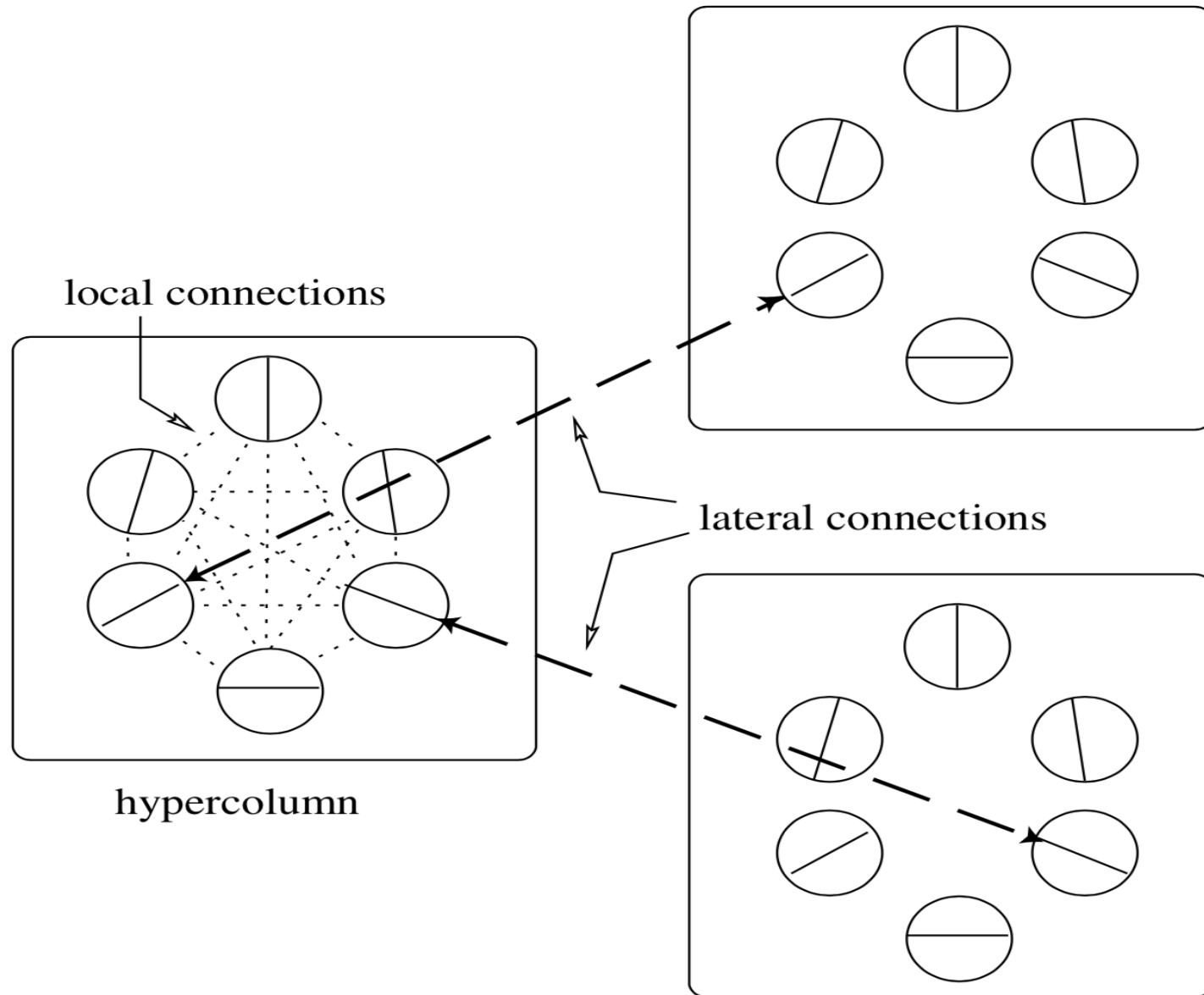
$$\mathbf{J}_{2,\text{loc}}(\phi) = a e^{-\frac{\phi^2}{2\sigma_{\text{loc}}^2}} - e^{-\frac{\phi^2}{4\sigma_{\text{loc}}^2}}$$

$\mathbf{J}_{1,\text{loc}}$ est une gaussienne centrée

Le “chapeau mexicain”



Connectivité longue distance



Connectivité longue distance

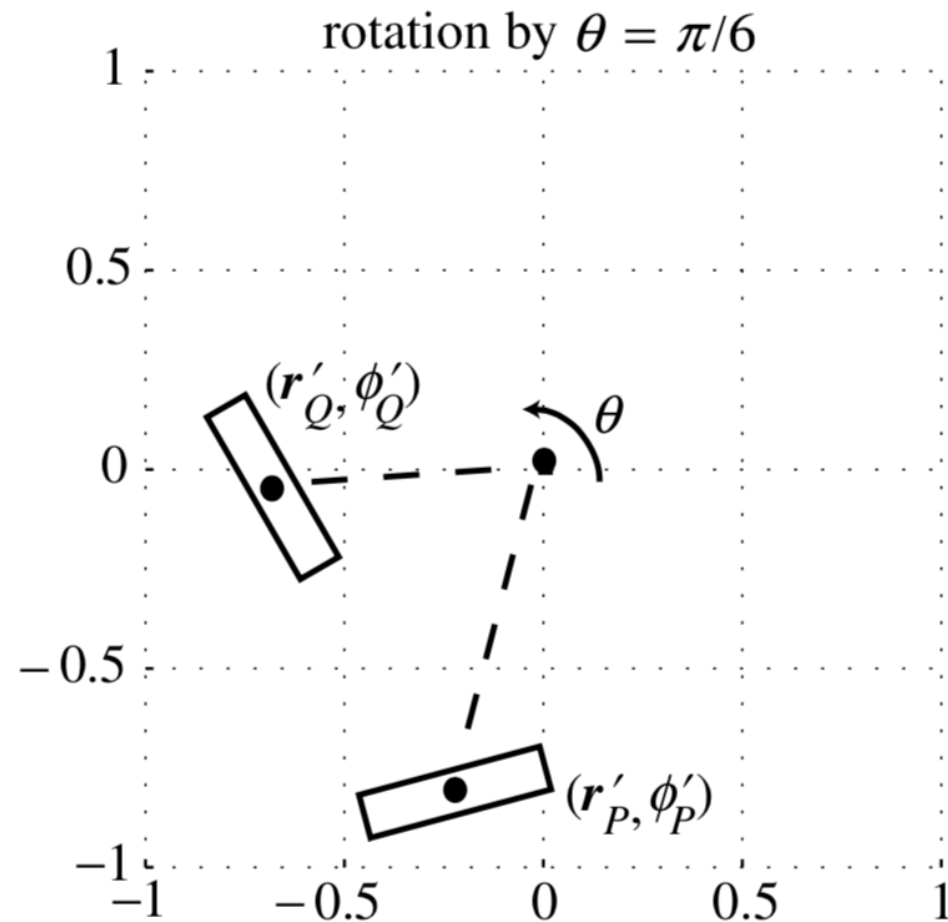
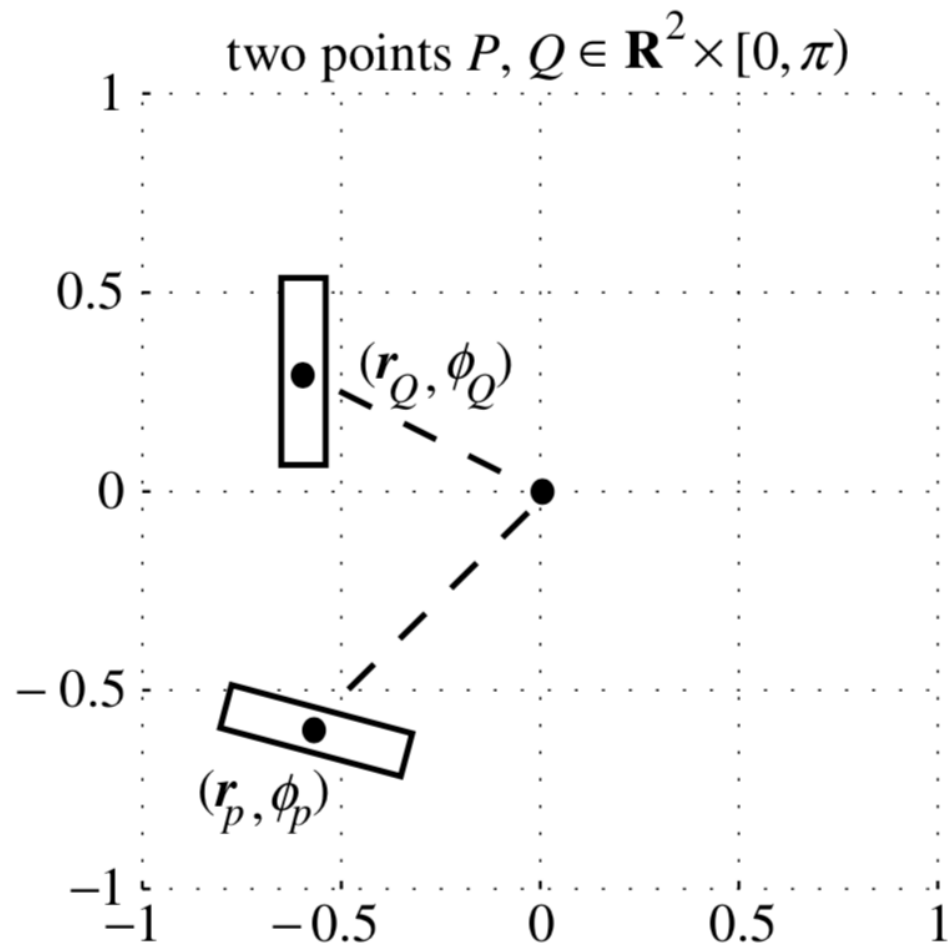
$$\mathbf{J}_{\text{LD}}(\mathbf{r}, \phi \mid \mathbf{r}', \phi') = G_{\sigma_\phi}(\phi - \phi') G_{\sigma_{\text{LD}}}(\mathbf{R}_{\pi-\phi}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')_2)$$

Action du groupe Euclidien

- Action de $E(2) = O(2) \ltimes \mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \times [0, \pi)$

$$\begin{aligned}\mathbf{t} \cdot (\mathbf{r}, \phi) &= (\mathbf{r} + \mathbf{t}, \phi) \\ \theta \cdot (\mathbf{r}, \phi) &= (\mathbf{R}_\theta \mathbf{r}, \phi + \theta) \\ \kappa \cdot (\mathbf{r}, \phi) &= (\kappa \mathbf{r}, -\phi)\end{aligned}$$

Action d'une rotation



$$\theta \cdot (\mathbf{r}, \phi) = (\mathbf{R}_\theta \mathbf{r}, \phi + \theta)$$

Invariance de la connectivité

$$\gamma \in E(2), \quad P \in \mathbb{R}^2 \times [0, \pi)$$

$$\gamma \cdot \mathbf{V}(P) = \mathbf{V}(\gamma^{-1}P)$$

$$\gamma \cdot \mathbf{J}(P \mid P') = \mathbf{J}(\gamma^{-1}P \mid \gamma^{-1}P')$$

- On vérifie que

$$\gamma \cdot \mathbf{J}(P \mid P') = \mathbf{J}(\gamma^{-1}P \mid \gamma^{-1}P') = \mathbf{J}(P \mid P')$$

Invariance des équations de CN

$$F(\mathbf{V}) := \mathbf{V}_t(P, t) + \mathbf{V}(P, t) - \int_{\Omega} \mathbf{J}(P | P') \mathbf{S}(\sigma \mathbf{V}(P', t)) dP'$$

$$\gamma \cdot F(\mathbf{V}) = \mathbf{V}_t(\gamma^{-1}P, t) + \mathbf{V}(\gamma^{-1}P, t) - \int_{\Omega} \mathbf{J}(\gamma^{-1}P | P') \mathbf{S}(\sigma \mathbf{V}(P', t)) dP'$$

$$P' = \gamma^{-1}Q$$

$$\gamma \cdot F(\mathbf{V}) = \mathbf{V}_t(\gamma^{-1}P, t) + \mathbf{V}(\gamma^{-1}P, t) - \int_{\Omega} \mathbf{J}(\gamma^{-1}P | \gamma^{-1}Q) \mathbf{S}(\sigma \mathbf{V}(\gamma^{-1}Q, t)) dQ$$

$$\gamma \cdot F(\mathbf{V}) = F(\gamma \cdot \mathbf{V})$$

L'opérateur F est équivariant par rapport à l'action du groupe $E(2)$

Bifurcation des solutions des équations de CN

- Quand on fait croître le paramètre de bifurcation μ la solution stationnaire $V_\mu(\mathbf{r}, \phi)$ devient instable
- De nouvelles solutions émergent
- Au voisinage du point de bifurcation ce sont des combinaisons linéaires des fonctions propres du linéarisé en 0 de l'opérateur CN

Quelles fonctions propres ?

- Les calculs montrent que les fonctions propres s'écrivent

$$\mathbf{V}_{\mathbf{k},\varphi}(\mathbf{r}, \phi) = u(\phi - \varphi)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \text{c.c} \quad \mathbf{k} = qe^{i\varphi}$$

- Les valeurs propres et les fonctions u ne dépendent que de q
- Pour chaque $\mathbf{k}$ le sous-espace propre correspondant est somme directe de deux sous-espaces pour lesquels u est pair ou impair

Quelles fonctions propres ?

- Dans le cas où $\varepsilon = 0$: $\lambda = -1 + \sigma\mu J_1(q)$
- La plus grande valeur propre est négative pour μ petit
- Quand on ajoute la connectivité latérale on calcule de manière perturbative par rapport à ε et on obtient

$$\frac{\lambda_{\pm} + 1}{\sigma\mu} = J_1(q) + \varepsilon g_1(q) + \varepsilon^2 g_2(q) + \text{t.o.s}$$

$$u_+(\phi) = \cos(2\phi) + \varepsilon f_+(q, \phi) + \text{t.o.s}$$

$$u_-(\phi) = \sin(2\phi) + \varepsilon f_-(q, \phi) + \text{t.o.s}$$

- Le sous espace propre est de dimension infinie.

Solutions doublement périodiques

- Permettent de passer à des espaces propres de dimension finie :
- Soit un réseau $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L} = \{m_1 \mathbf{l}_1 + m_2 \mathbf{l}_2, m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\}$$

- Trois types de réseaux et leurs sous-groupes d'holoédrie :

– Rhomboédrique D_2

– Carré D_4

– Hexagonal D_6

- Le groupe euclidien de symétries $E(2) = O(2) \rtimes \mathbb{R}^2$ devient

$$\Gamma_{\mathcal{L}} = D_n \rtimes \mathbb{T}_{\mathcal{L}}^2, \quad n = 2, 4, 6$$

Solutions doublement périodiques

- On détermine l'ensemble $K_{\mathcal{L}}$ des fonctions propres et l'action de $\Gamma_{\mathcal{L}}$ sur cet ensemble
- Si $u(\phi)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ est d.p. alors $\mathbf{k}$ appartient au réseau dual de $\mathcal{L}$
- On fixe la norme de $\mathbf{k}$ à 1 et on obtient (Bressloff et al. 2001)

Table 1. Generators for the planar lattices and their dual lattices

lattice	ℓ_1	ℓ_2	$\mathbf{k}_1$	$\mathbf{k}_2$
square	(1, 0)	(0, 1)	(1, 0)	(0, 1)
hexagonal	(1, $1/\sqrt{3}$)	(0, $2/\sqrt{3}$)	(1, 0)	$\frac{1}{2}(-1, \sqrt{3})$
rhombic	(1, $-\cot \eta$)	(0, $\operatorname{cosec} \eta$)	(1, 0)	($\cos \eta$, $\sin \eta$)

Table 2. Eigenfunctions corresponding to shortest dual wave vectors

lattice	$a(\mathbf{r}, \phi)$
square	$c_1 u(\phi) e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}} + c_2 u(\phi - \pi/2) e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}} + \text{c.c.}$
hexagonal	$c_1 u(\phi) e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}} + c_2 u(\phi - 2\pi/3) e^{i\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{r}} + c_3 u(\phi + 2\pi/3) e^{i\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{r}} + \text{c.c.}$
rhombic	$c_1 u(\phi) e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}} + c_2 u(\phi - \eta) e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}} + \text{c.c.}$

Coordonnées

- $K_{\mathcal{L}}$ s'identifie à $(c_1, \dots, c_m) \in \mathbb{C}^m$, $m = 2, 3$
- L'action de $\Gamma_{\mathcal{L}}$ sur $K_{\mathcal{L}}$ se calcule aisément

Actions de groupe

Table A2. *Left, $\mathbf{D}_2 + \mathbf{T}^2$ action on rhombic lattice (centre, $\mathbf{D}_4 + \mathbf{T}^2$ action on square lattice; right, $\mathbf{D}_6 + \mathbf{T}^2$ action on hexagonal lattice)*

(For $u(\phi)$ even, $\varepsilon = +1$; for $u(\phi)$ odd, $\varepsilon = -1$.)

$\mathbf{D}_2$	action	$\mathbf{D}_4$	action	$\mathbf{D}_6$	action
$\mathbf{1}$	(c_1, c_2)	$\mathbf{1}$	(c_1, c_2)	$\mathbf{1}$	(c_1, c_2, c_3)
ξ	$(\overline{c_1}, \overline{c_2})$	ξ	$(\overline{c_2}, c_1)$	ξ	$(\overline{c_2}, \overline{c_3}, \overline{c_1})$
κ_η	$\varepsilon(c_2, c_1)$	ξ^2	$(\overline{c_1}, \overline{c_2})$	ξ^2	(c_3, c_1, c_2)
$\kappa_\eta \xi$	$\varepsilon(\overline{c_2}, \overline{c_1})$	ξ^3	$(c_2, \overline{c_1})$	ξ^3	$(\overline{c_1}, \overline{c_2}, \overline{c_3})$
		κ	$\varepsilon(c_1, \overline{c_2})$	ξ^4	(c_2, c_3, c_1)
		$\kappa \xi$	$\varepsilon(\overline{c_2}, \overline{c_1})$	ξ^5	$(\overline{c_3}, \overline{c_1}, \overline{c_2})$
		$\kappa \xi^2$	$\varepsilon(\overline{c_1}, c_2)$	κ	$\varepsilon(c_1, c_3, c_2)$
		$\kappa \xi^3$	$\varepsilon(c_2, c_1)$	$\kappa \xi$	$\varepsilon(\overline{c_2}, \overline{c_1}, \overline{c_3})$
				$\kappa \xi^2$	$\varepsilon(c_3, c_2, c_1)$
				$\kappa \xi^3$	$\varepsilon(\overline{c_1}, \overline{c_3}, \overline{c_2})$
				$\kappa \xi^4$	$\varepsilon(c_2, c_1, c_3)$
				$\kappa \xi^5$	$\varepsilon(\overline{c_3}, \overline{c_2}, \overline{c_1})$
$[\theta_1, \theta_2]$	$(e^{-2\pi i \theta_1} c_1, e^{-2\pi i \theta_2} c_2)$				$(e^{-2\pi i \theta_1} c_1, e^{-2\pi i \theta_2} c_2, e^{-2\pi i (\theta_1 + \theta_2)} c_3)$

Solutions observables

- On a le lemme (Golubitsky et al. 1988) :
Pour chaque sous-groupe axial de $\Gamma_{\mathcal{L}}$ il existe une unique solution périodique qui bifurque de la solution homogène nulle.
- Il faut donc calculer les sous-groupes axiaux de $\Gamma_{\mathcal{L}}$
- On le fait sur les représentations
 $(c_1, \dots, c_m) \in \mathbb{C}^m, m = 2, 3$
- Ce qui permet de déterminer q et $u(\phi)$

“Planforms”

Table 3. *Even planforms with $u(-\phi) = u(\phi)$*

(The hexagon solutions (0) and (π) have the same isotropy subgroup, but they are not conjugate solutions.)

lattice	name	planform eigenfunction
square	even square	$u(\phi) \cos x + u(\phi - \pi/2) \cos y$
	even roll	$u(\phi) \cos x$
rhombic	even rhombic	$u(\phi) \cos(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}) + u(\phi - \eta) \cos(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r})$
	even roll	$u(\phi) \cos(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r})$
hexagonal	even hexagon (0)	$u(\phi) \cos(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}) + u(\phi + \pi/3) \cos(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}) + u(\phi - \pi/3) \cos(\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{r})$
	even hexagon (π)	$u(\phi) \cos(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}) + u(\phi + \pi/3) \cos(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}) - u(\phi - \pi/3) \cos(\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{r})$
	even roll	$u(\phi) \cos(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r})$

On obtient les trois formes :

- Planforms non contourées
- Planforms paires contourées
- Planforms impaires contourées

$$u(\phi) \approx \text{cst}$$

$$u(\phi) \approx \cos(2\phi)$$

$$u(\phi) \approx \sin(2\phi)$$

Représentations graphiques des “planforms”

- Non contourées : fonctions doublement périodiques

Planforms non-contourées

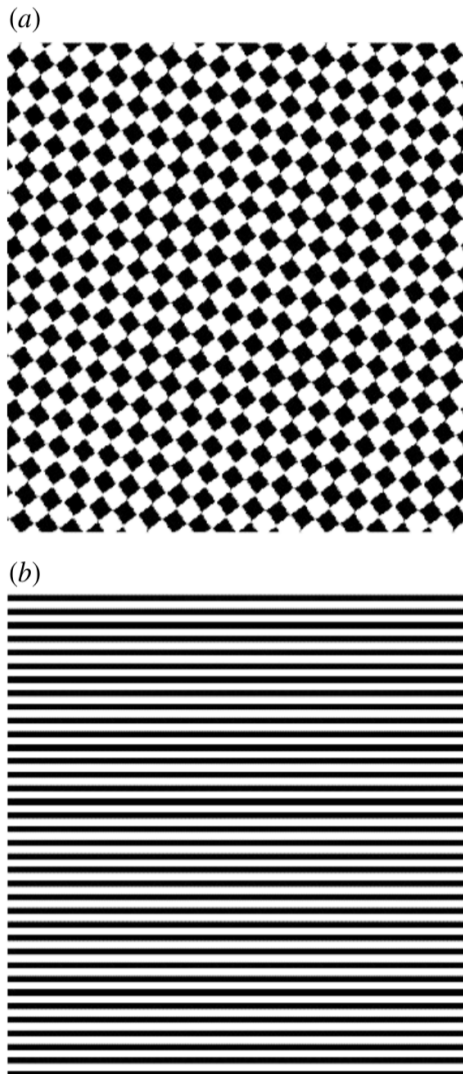


Figure 19. Non-contoured axial eigenfunctions on the square lattice: (a) square, (b) roll.

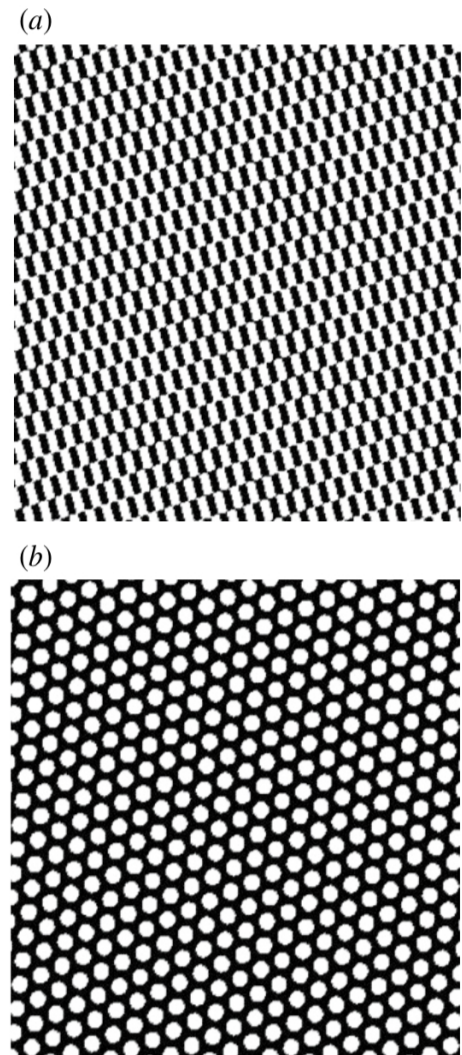


Figure 20. Non-contoured axial eigenfunctions on rhombic and hexagonal lattices: (a) rhombic, (b) hexagonal.

Planforms contourées

- Elles sont fonctions de l'orientation
- On écrit
- $$V(\mathbf{r}, \phi) = v(\mathbf{r}) \cos(2\phi - 2\phi_0(\mathbf{r}))$$
- Les fonctions propres sont composées de taches de formes carrées, triangulaires ou rhombiques au centre desquelles la phase est constante mais l'amplitude varie
- On les représente par un contour d'orientation $\phi_0(\mathbf{r}_{\max})$ au point $\mathbf{r}_{\max}$ où l'amplitude est maximale.

Exemples de planforms contourées

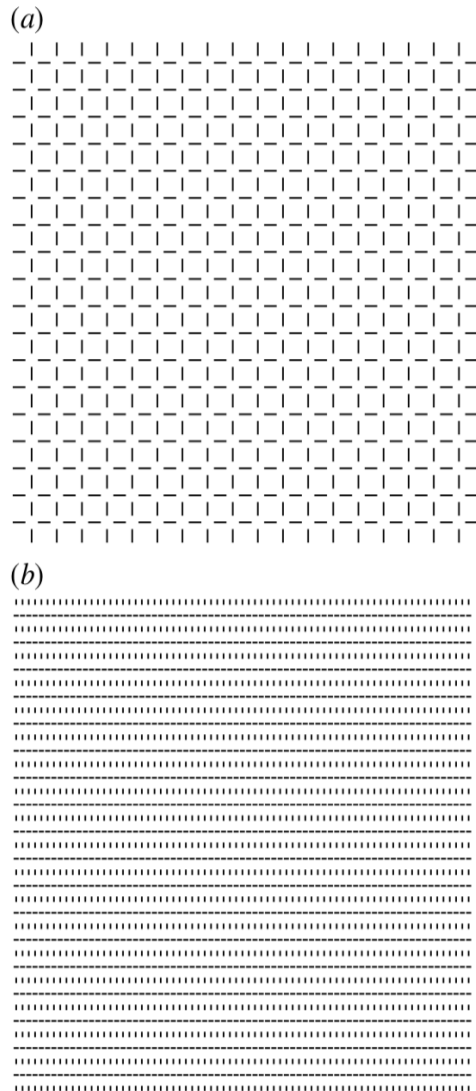


Figure 21. Contours of even **axial** eigenfunctions on the square lattice: (a) square, (b) roll.

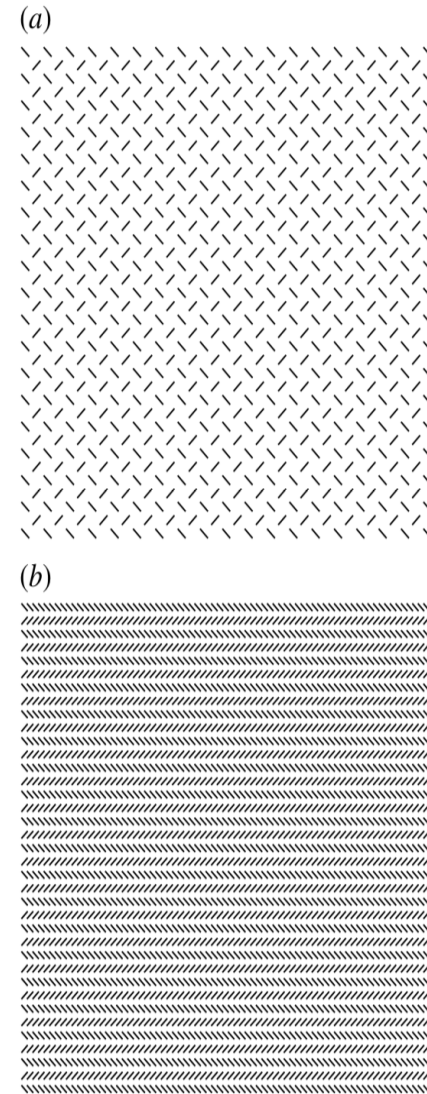


Figure 22. Contours of odd axial eigenfunctions on the square lattice: (a) square, (b) roll.

Exemples de planforms contourées

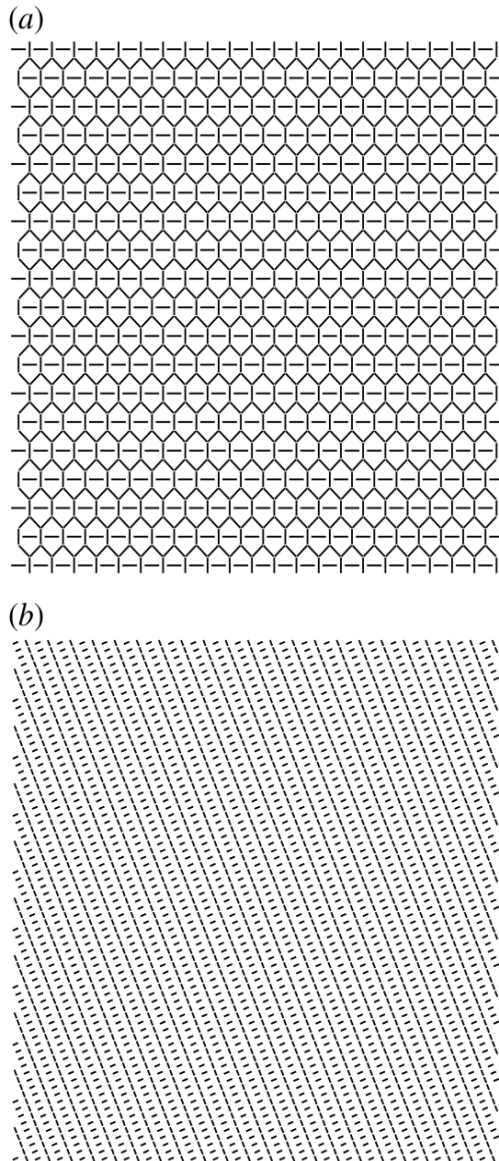


Figure 23. Contours of even axial eigenfunctions on the rhombic lattice: (a) rhombic, (b) roll.

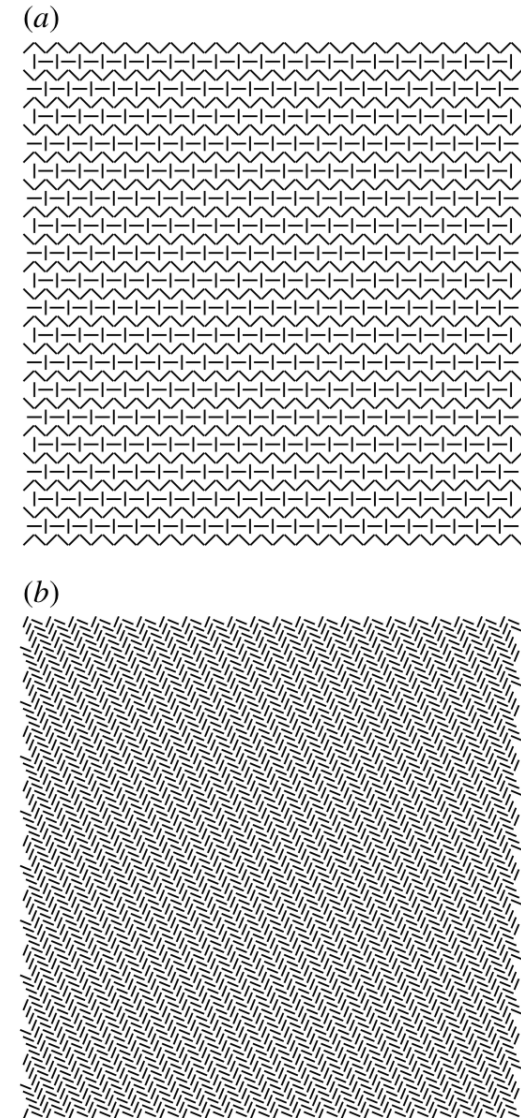


Figure 24. Contours of odd axial eigenfunctions on the rhombic lattice: (a) rhombic, (b) roll.

Exemples de planforms contourées

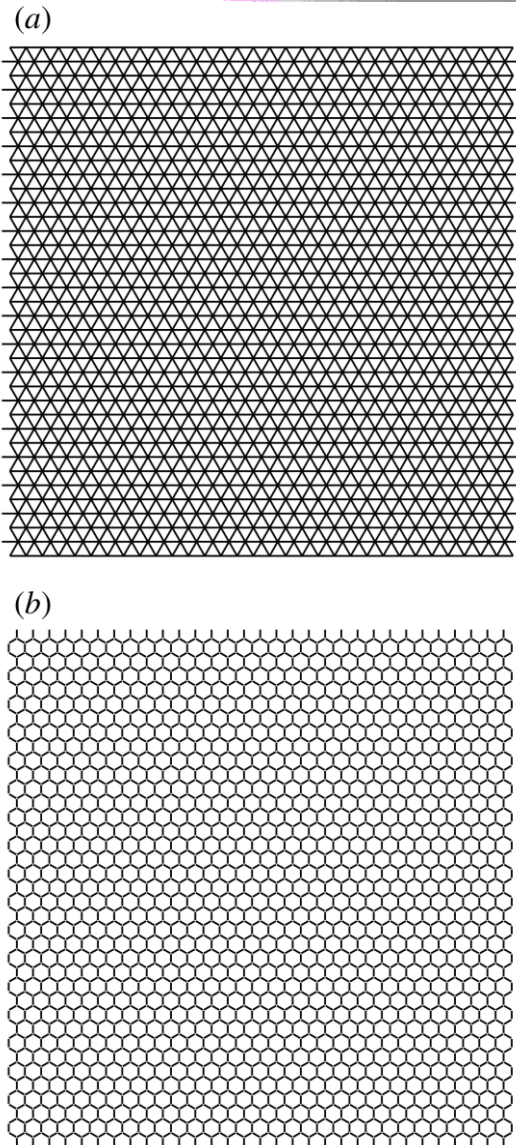


Figure 25. Contours of even axial eigenfunctions on the hexagonal lattice: (a) π -hexagonal (b) 0-hexagonal

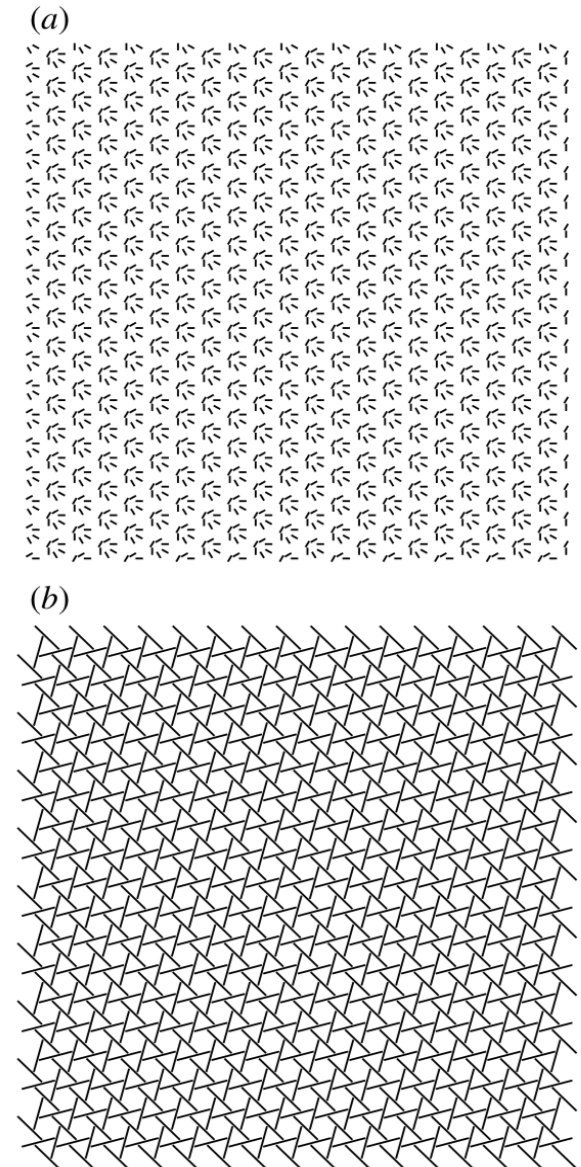


Figure 26. Contours of odd axial eigenfunctions on the

Carte rétino-corticale

- La correspondance entre les coordonnées polaires rétiniennes et les coordonnées cartésiennes corticales :

$$\begin{cases} x &= \log(1 + r) \\ y &= \frac{r\theta}{1+r} \end{cases}$$

- Loin de la fovea :

$$r \gg 1 \text{ donc } \begin{cases} x &\approx \log r \\ y &\approx \theta \end{cases} \quad x + iy = \log(re^{i\theta})$$

Carte rétino-corticale (suite)

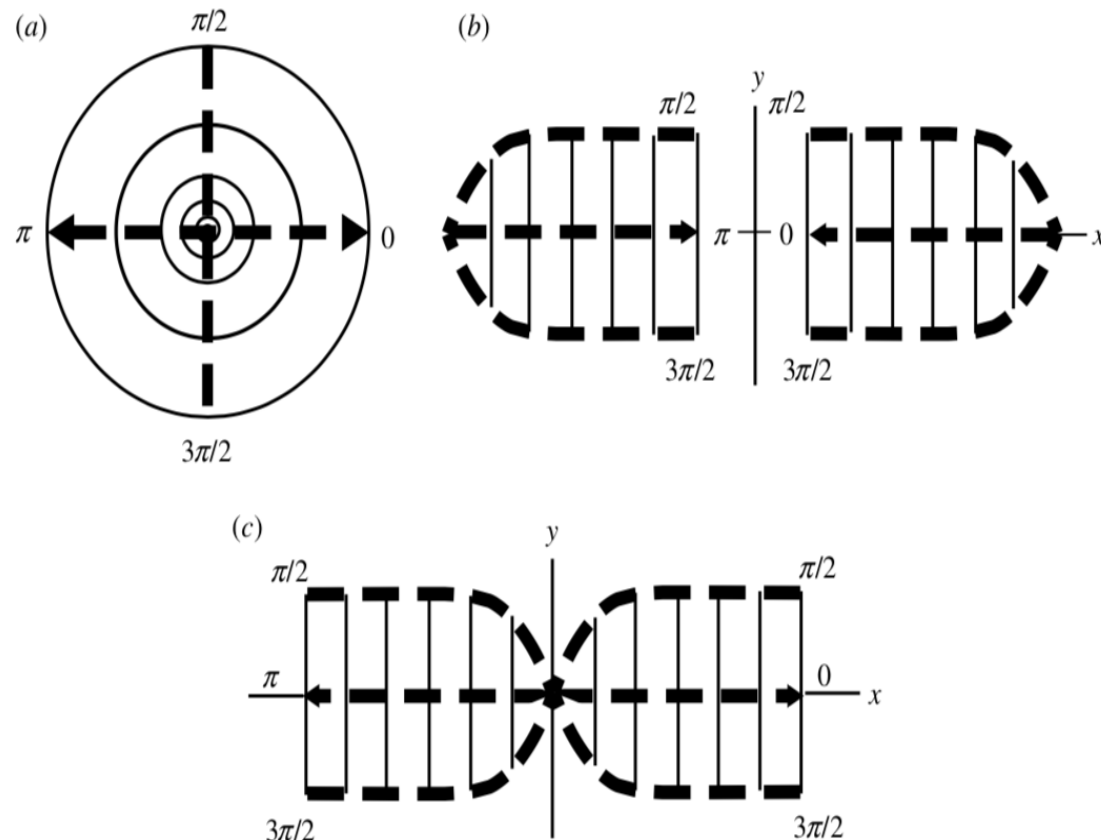


Figure 5. The retinocortical map: (a) visual field; (b) the actual cortical map, comprising right and left hemisphere transforms; (c) a transformed version of the cortical map in which the two transforms are realigned so that both foveal regions correspond to $x = 0$.

Carte rétino-corticale (fin)

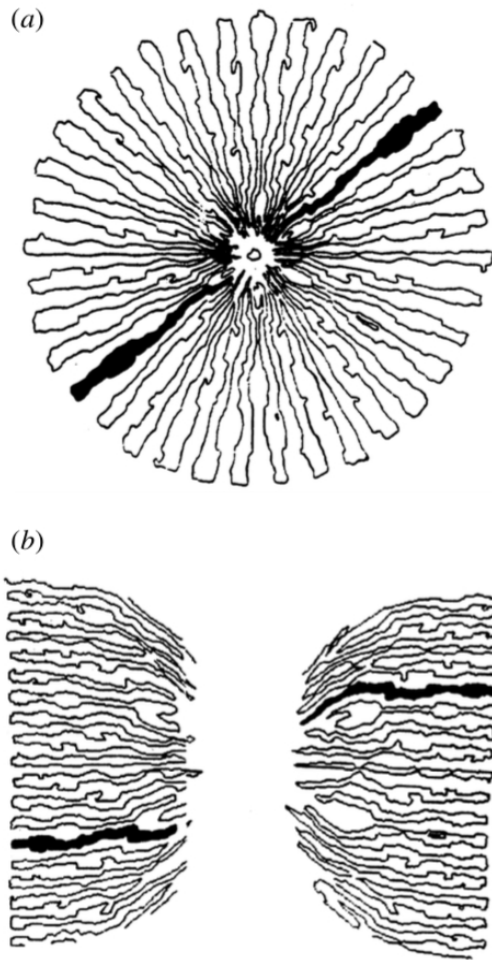


Figure 6. Action of the retinocortical map on the funnel form constant. (a) Image in the visual field; (b) V1 map of the image.

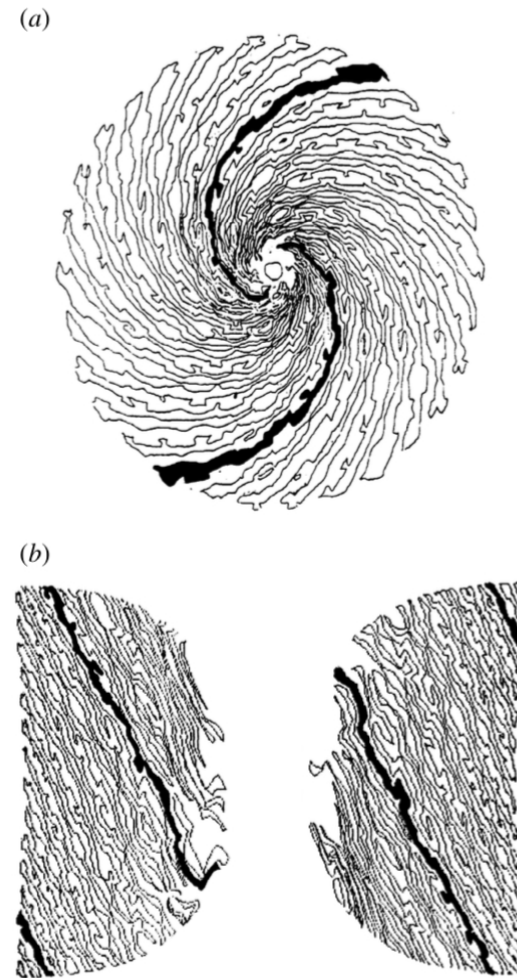


Figure 7. Action of the retinocortical map on the spiral form constant. (a) Image in the visual field; (b) V1 map of the image.

Dans la rétine : non contourées

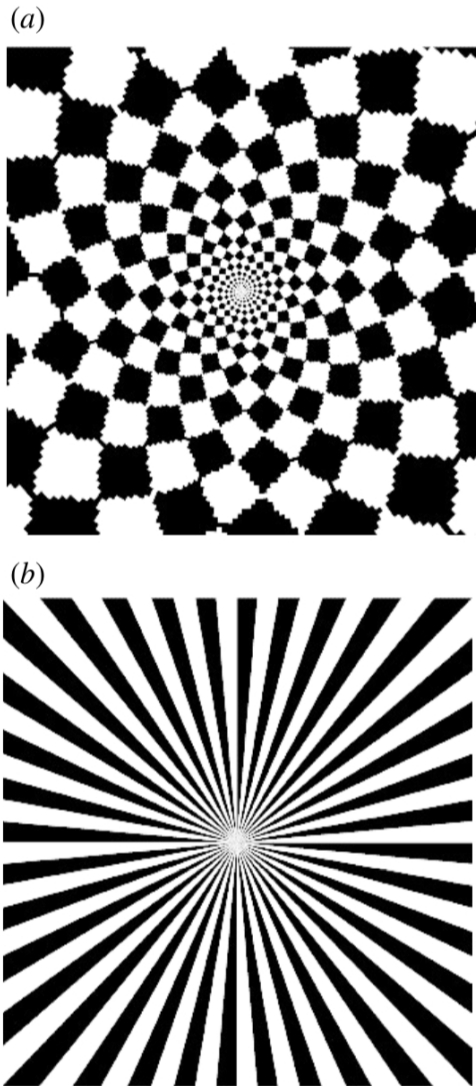


Figure 29. Action of the single inverse retinocortical map on non-contoured square planforms: (a) square, (b) roll.

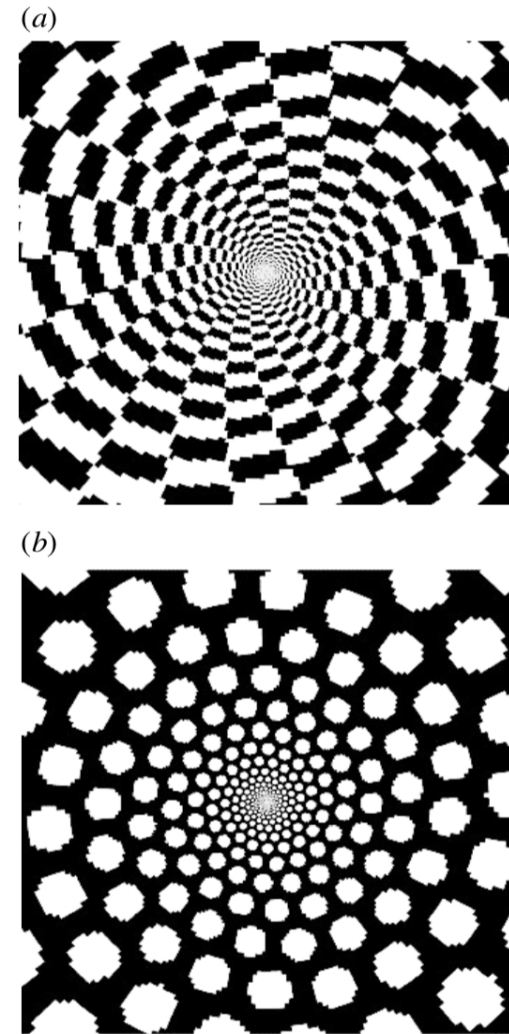


Figure 30. Action of the single inverse retinocortical map on non-contoured rhombic and hexagonal planforms: (a) rhombic, (b) hexagonal.

Dans la rétine : contourées

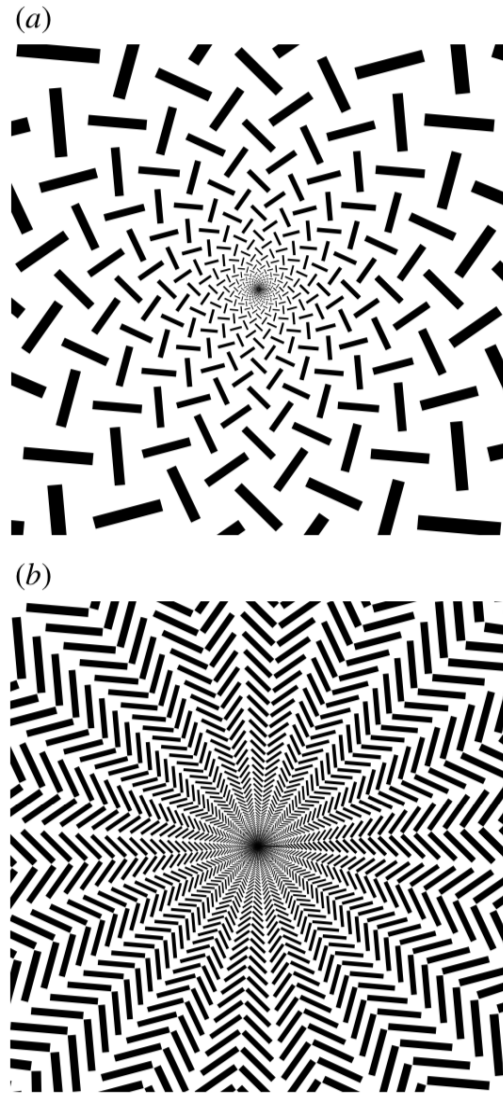


Figure 32. Action of the double inverse retinocortical map on odd square planforms: (a) square, (b) roll.

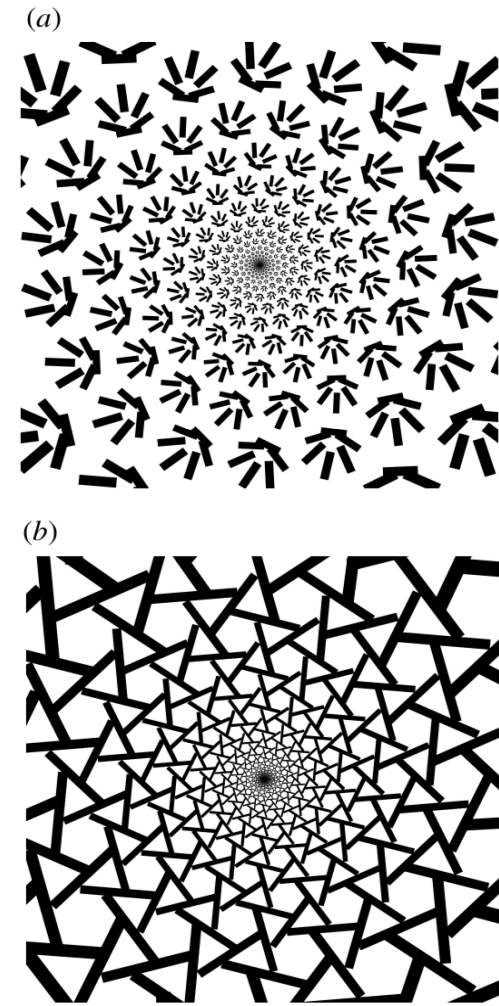
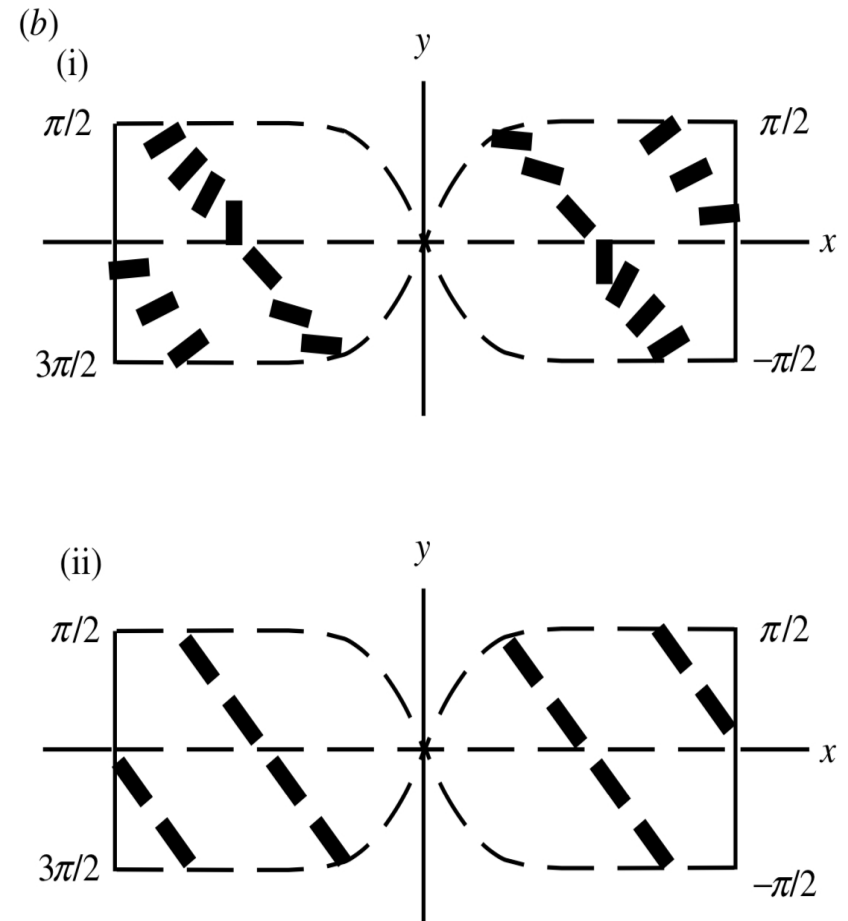
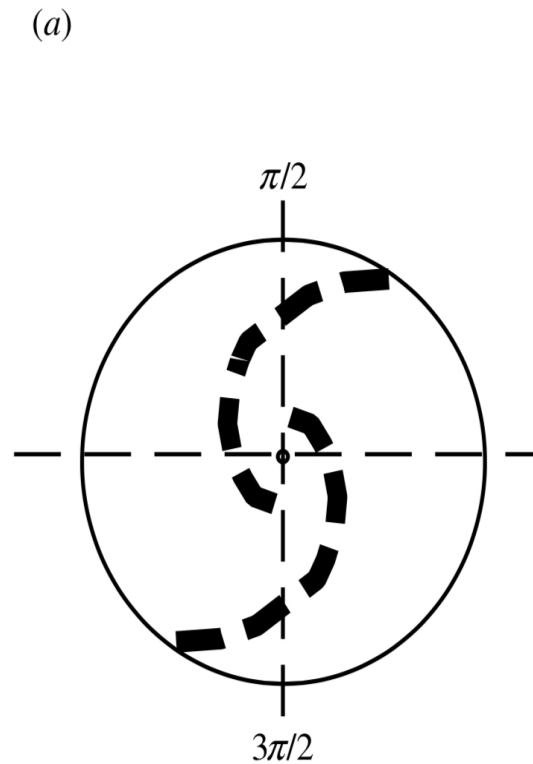


Figure 36. Action of the double inverse retinocortical map on odd hexagonal planforms: (a) triangular, (b) 0-hexagonal.

Carte rétinocorticale augmentée

$$\phi = \phi_R - \theta_R$$



Solutions observables

- Il reste à déterminer la stabilité
- On utilise les formes normales sur la variété centrale

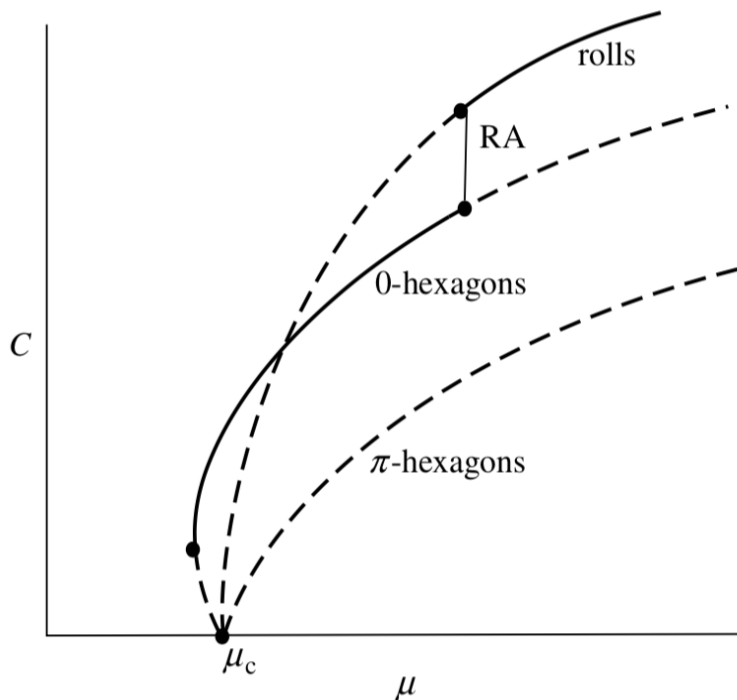


Figure 38. Bifurcation diagram showing the variation of the amplitude C with the parameter μ for even hexagonal and roll patterns with $\eta > 0$. Solid and dashed curves indicate stable and unstable solutions, respectively. Also shown is a secondary branch of rectangular patterns, RA. Higher-order terms in the amplitude equation are needed to determine its stability.

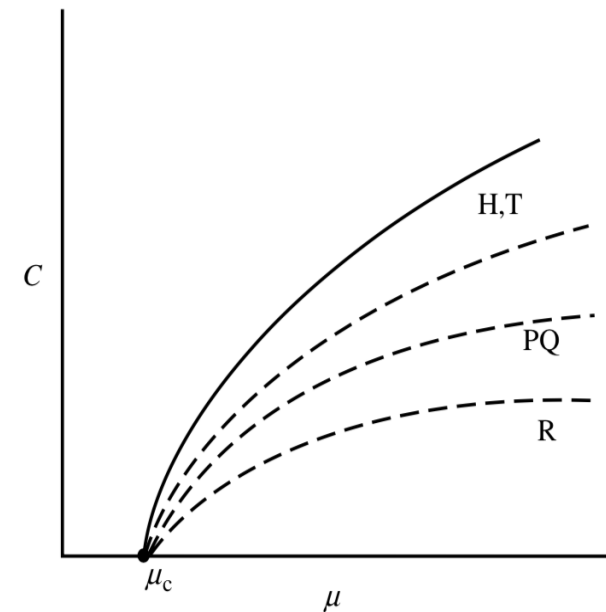
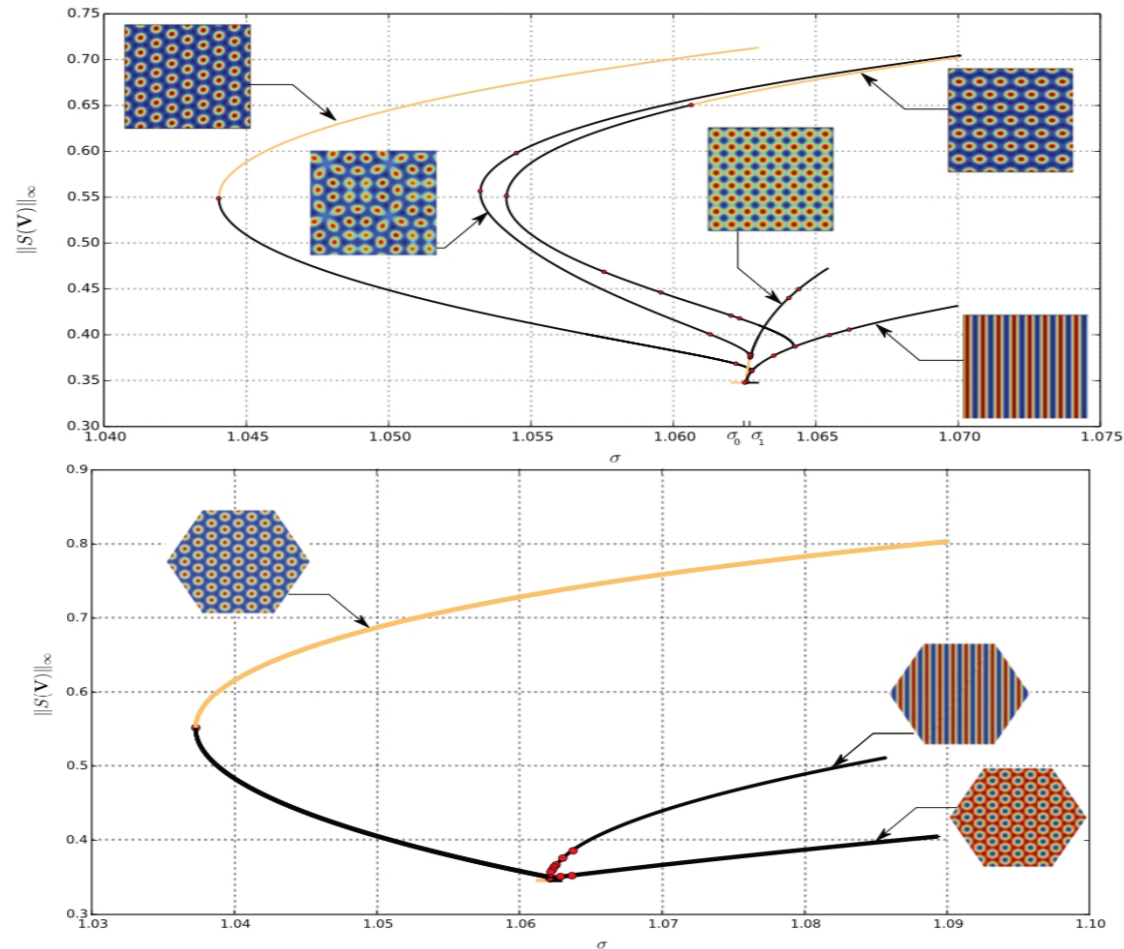


Figure 40. Bifurcation diagram showing the variation of the amplitude C with the parameter μ for odd patterns on a hexagonal lattice. Solid and dashed curves indicate stable and unstable solutions, respectively. Either hexagons (H) or triangles (T) are stable (depending on higher-order terms in the amplitude equation) whereas patchwork quilts (PQ) and rolls (R) are unstable. Secondary bifurcations (not shown) may arise from higher-order terms (Bressloff *et al.* 2000b).

Discussion

- L'analyse précédente n'est en général valable que dans un tout petit voisinage de la valeur critique de la pente (**Veltz et al 2015**)

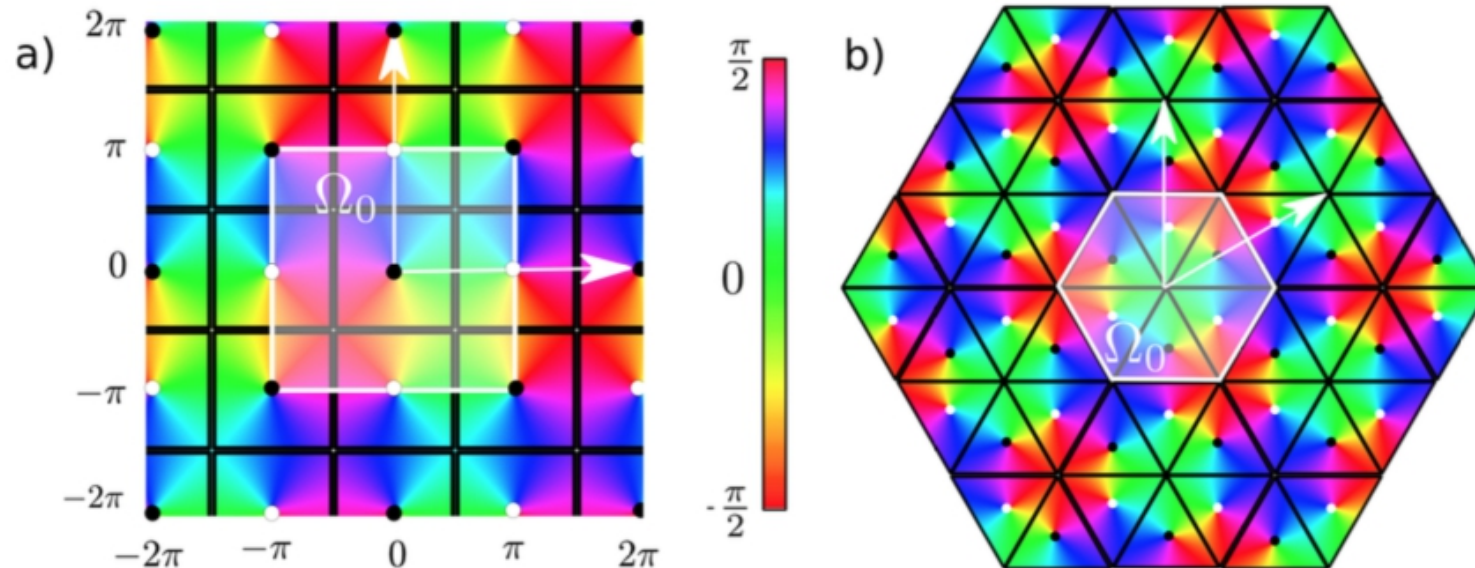


Discussion

- Des solutions dépendant du temps peuvent émerger de bifurcations secondaires (Hopf)
- Continuation numérique
- Prise en compte des “moulins à vent”

Les moulins à vent

- Introduction de la carte des orientations préférées (OP)
- Idéalisation mathématique : la carte OP est périodique de même période que la solution stationnaire sans connectivité LD



Remarques

- Travaux similaires et antérieurs pour les équations de réaction-diffusion et les équations de convection (Bosch Vivancos et al., Golubitsky et al.)
- Approche neuro-géométrique (Petitot, Citti, Sarti et al.)

Limites de l'approche

- Le modèle ne rend pas compte de certaines illusions.

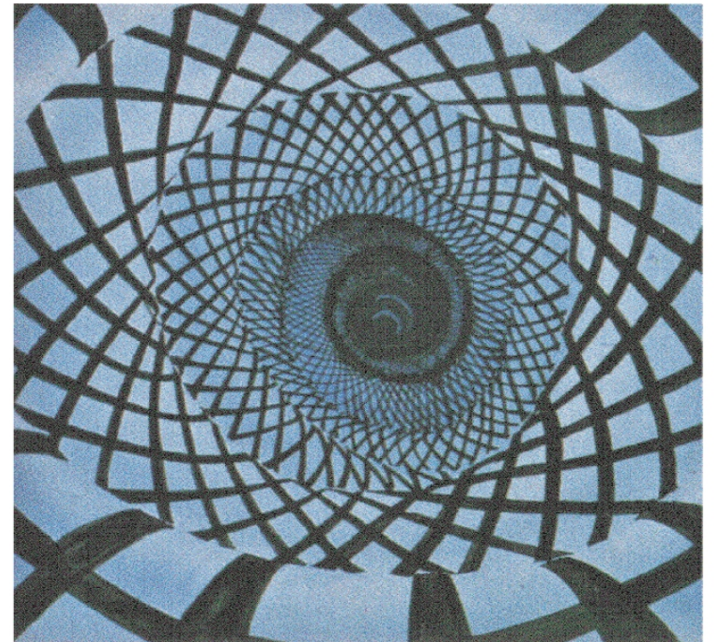


Figure 41. Tunnel hallucination generated by LSD. Redrawn from Oster (1970).

Limites

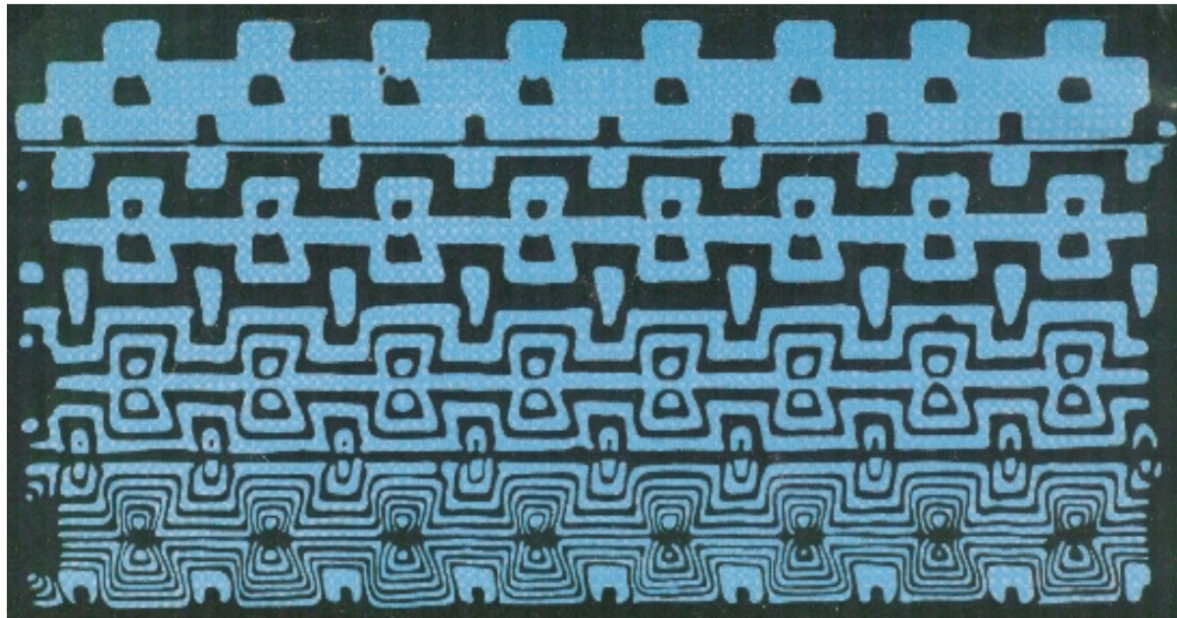
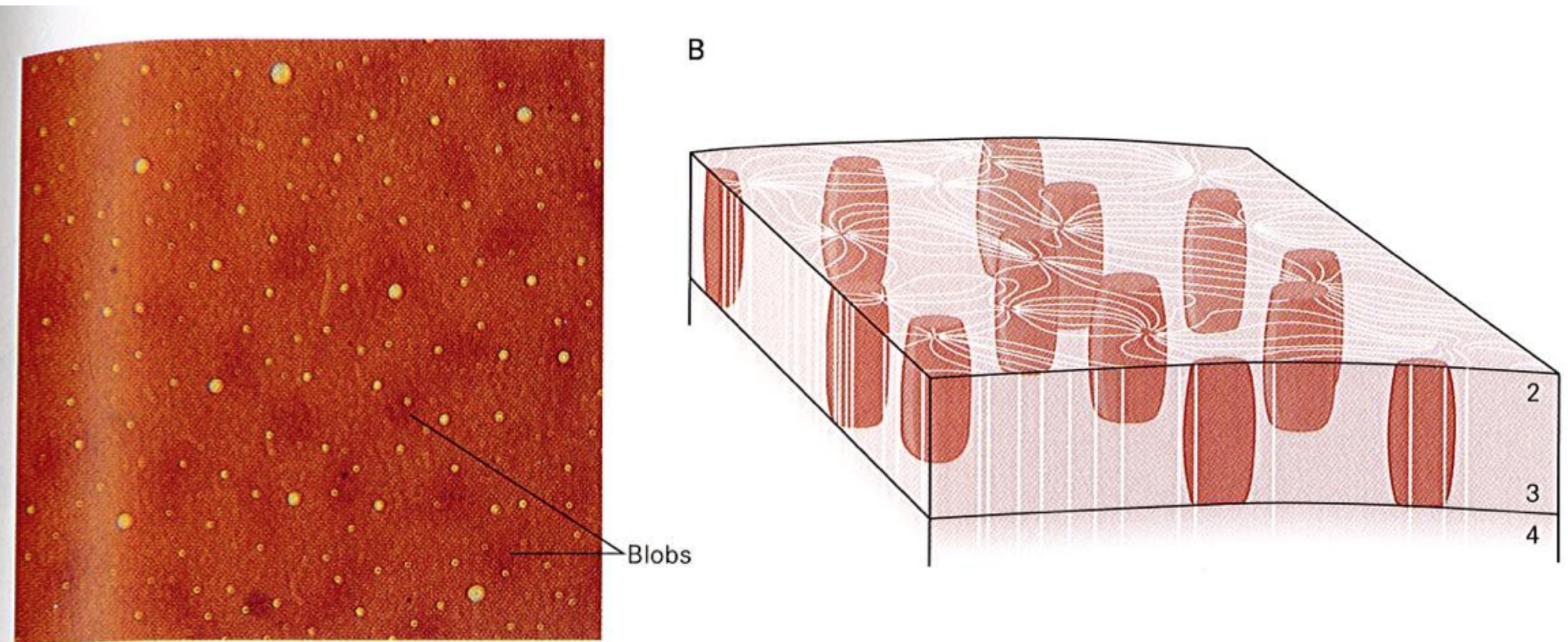


Figure 43. Complex hallucination generated by LSD.
Redrawn from Oster (1970).

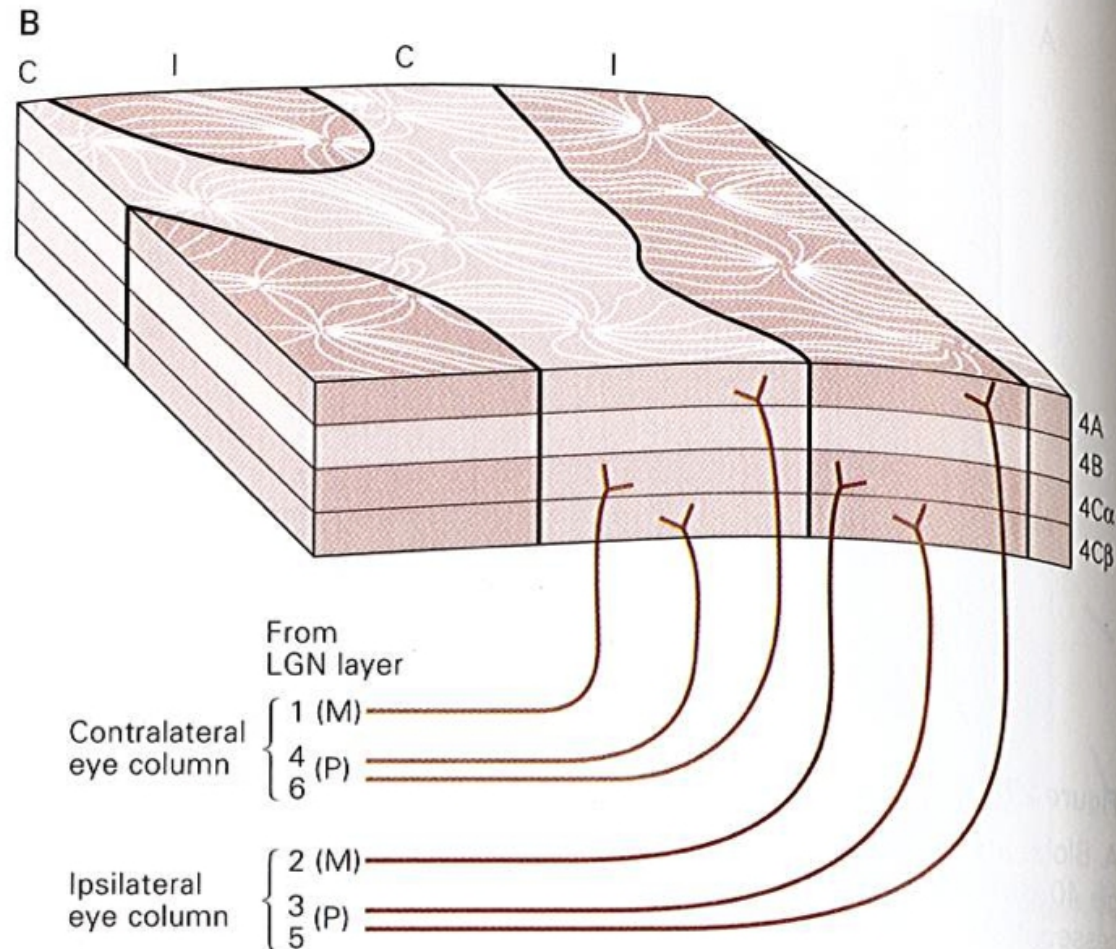
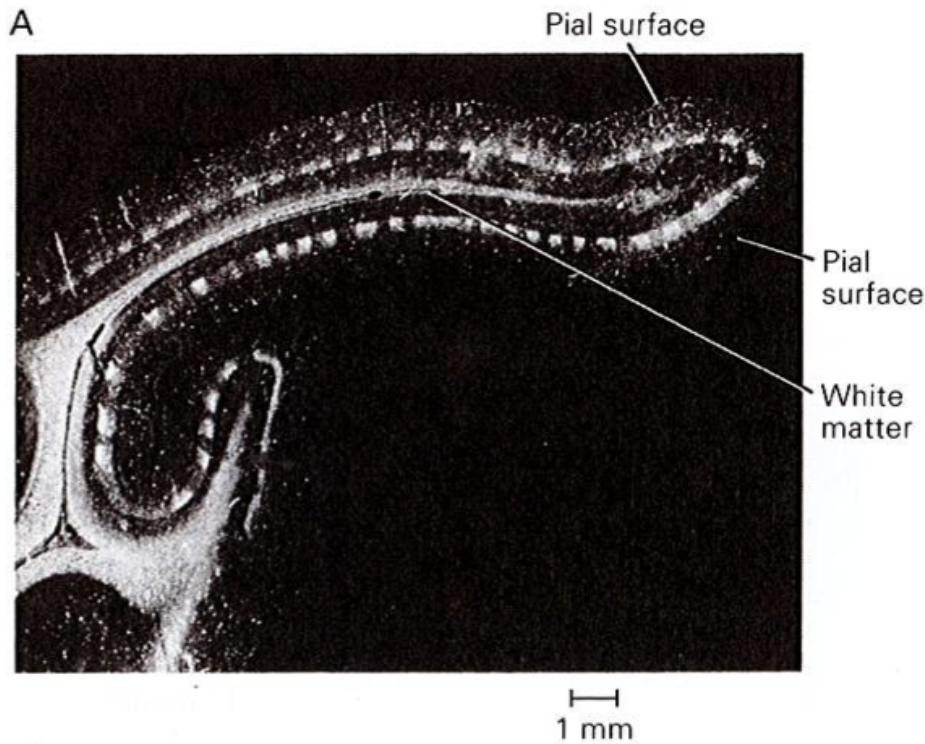
Sensibilité à la couleur

- Organisation en “blobs” de la sensibilité à la couleur
- Principles of Neural Science, E. Kandel, J. Schwartz, T. Jessel, 4th Edition, 2000



Dominance oculaire

- Organisation en colonnes pour la dominance oculaire.



Module fonctionnel complet

- Dominance oculaire B1 + orientation préférées B2 + “blobs” couleur B3

