Revue d'Histoire des Mathématiques

Le paramétrage elliptique des courbes cubiques par Alfred Clebsch

François Lê

Tome 24 Fascicule 1

2018

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publiée avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

REVUE D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

Secrétariat :

Nathalie Christiaën
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré
11, rue Pierre et Marie Curie, 75231 Paris Cedex 05
Tél. : (33) 01 44 27 67 99 / Fax : (33) 01 40 46 90 96
Mél : rhmsmf@ihp.fr / URL : http//smf.emath.fr/

Périodicité : La *Revue* publie deux fascicules par an, de 150 pages chacun environ.

Tarifs : Prix public Europe : 90 €; prix public hors Europe : 99 €;
prix au numéro : 43 €.
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Diffusion : SMF, Maison de la SMF, Case 916 - Luminy, 13288 Marseille Cedex 9
Hindustan Book Agency, O-131, The Shopping Mall, Arjun Marg, DLF Phase 1, Gurgaon 122002, Haryana, Inde

 Nº ISSN : 1262-022X

Maquette couverture : Armelle Stosskopf

Revue d'histoire des mathématiques
24 (2018), p. 1–39

LE PARAMÉTRAGE ELLIPTIQUE DES COURBES CUBIQUES PAR ALFRED CLEBSCH

François Lê

Résumé. — La possibilité de paramétrer toute courbe cubique à l'aide des fonctions elliptiques est un résultat aujourd'hui classique en géométrie algébrique et en théorie des nombres. Dans cet article, nous nous intéressons à des travaux d'Alfred Clebsch (1833–1872) publiés en 1864, dans lesquels ce dernier établit un tel paramétrage afin de prouver un théorème énoncé sans démonstration vingt ans auparavant par Jacob Steiner. En examinant de près les sources et les démonstrations de Clebsch, nous mettons en évidence une configuration disciplinaire originale à l'œuvre dans ses travaux, à l'interface entre géométrie, analyse, algèbre et arithmétique.

Abstract (The elliptic parameterization of cubic curves by Alfred Clebsch)
The possibility of parameterizing any cubic curve with the help of elliptic functions is now a classical result in algebraic geometry and in number theory. This paper focuses on some research of Alfred Clebsch (1833–1872) published in 1864, in which such a parameterization is found and used to demonstrate a theorem that had been stated without proof two decades earlier by Jacob Steiner. Through a thorough examination of Clebsch's sources and proofs, we bring to light an original disciplinary configuration linking together elements of geometry, analysis, algebra, and arithmetic.

Texte reçu le 9 mai 2017, accepté le 3 octobre 2017, révisé le 24 octobre 2017.

F. Lê, Univ Lyon, Université Claude Bernard Lyon 1, CNRS UMR 5208, Institut Camille Jordan, 43 blvd. du 11 novembre 1918, F-69622 Villeurbanne Cedex, France.
Courrier électronique : `fle@math.univ-lyon1.fr`
Url : `http://math.univ-lyon1.fr/~fle/`

Classification mathématique par sujets (2000) : 01A55, 01A60, 11-03, 14-03, 14H52, 33-03.

Mots clefs : Alfred Clebsch, fonctions elliptiques, courbes cubiques, Siegfried Aronhold, histoire de la géométrie algébrique, histoire de l'analyse, histoire de la théorie des nombres.

Key words and phrases. — Alfred Clebsch, elliptic functions, cubic curves, Siegfried Aronhold, history of algebraic geometry, history of analysis, history of number theory.

1. PARAMÉTRER LES CUBIQUES POUR RÉSOUDRE UN PROBLÈME DE STEINER

Une courbe plane peut être décrite de plusieurs manières, comme au moyen d'une équation entre les deux coordonnées du plan ou par des formules exprimant les coordonnées de ses points en fonction d'un paramètre auxiliaire : par exemple, à l'équation $x^2 + y^2 = 1$ du cercle unité correspond la représentation paramétrique bien connue $(x, y) = (\cos u, \sin u)$. Différentes études historiques ont souligné que c'est à partir du milieu du XVIIIe siècle, dans l'*Introductio in analysin infinitorum* de Leonhard Euler [1748], que s'est exprimée l'idée de systématiser la recherche de représentations paramétriques de courbes[1]. Dans cet ouvrage, Euler montre entre autres comment trouver un paramétrage rationnel des courbes coniques[2]; on trouve par ailleurs dans le courant de la deuxième moitié du XVIIIe siècle des contributions d'autres mathématiciens faisant état de paramétrages de coniques particulières à l'aide des fonctions trigonométriques circulaires ou hyperboliques[3].

Le présent article s'intéresse à la représentation paramétrique d'un autre type de courbes que les coniques, définies non pas par une équation polynomiale de degré 2 comme ces dernières mais par une équation de degré 3 : ce sont les *courbes cubiques*, aussi appelées *courbes du troisième ordre*[4]. Plus précisément, nous allons étudier dans quel contexte et selon quelles modalités les courbes cubiques ont été paramétrées par des fonctions spéciales appelées *fonctions elliptiques*, dont nous verrons qu'elles étaient considérées par certains mathématiciens du XIXe siècle comme des généralisations des fonctions trigonométriques circulaires.

Notons que la possibilité de décrire ainsi les courbes cubiques n'est pas un résultat mathématique anodin : le paramétrage elliptique a notamment été utilisé de façon cruciale dans les années 1900–1920 lors des débuts du sujet de la géométrie algébrique arithmétique, dont l'idée de base consiste

---

1 [Brill & Noether 1892–93, 140–141], [Boyer 1956, 187], [Gray 1994, 863].

2 [Euler 1748, vol. 1, p. 42]. Euler démontre que toute courbe d'équation $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey = 0$ peut être paramétrée par $(x, y) = (\frac{-du^2-eu}{au^2+bu+c}, \frac{-du-e}{au^2+bu+c})$. Le paramétrage est dit rationnel car x et y sont des fractions rationnelles du paramètre u.

3 Voir les références données dans [Dingeldey 1903, 10] et [Grattan-Guinness 1994b, 501], en particulier [Lambert 1768 ; Legendre 1788].

4 Dans toute la suite, les courbes cubiques considérées seront toujours supposées être sans point singulier (c'est-à-dire qu'il est possible de « bien » définir une tangente en chacun de leurs points) et formées de points à coordonnées complexes et éventuellement situés à l'infini.

à interpréter la recherche de solutions entières ou rationnelles d'équations algébriques en celle de points à coordonnées entières ou rationnelles sur les courbes ou les surfaces définies par ces équations[5]. Dans les textes correspondant à ces débuts de la géométrie algébrique arithmétique, le paramétrage elliptique des cubiques apparaît d'ailleurs comme un résultat bien connu, toujours invoqué sans référence à des travaux antérieurs et sans attribution de paternité. Par exemple, alors qu'Henri Poincaré rappelle simplement qu'à « chaque point d'une courbe de genre 1 est attaché un *argument elliptique*[6] » [Poincaré 1901, 168], Beppo Levi utilise de façon récurrente des « coordinate ellittiche » ou le « parametro ellittico » des points d'une cubique mais aucun commentaire n'est fait à leur sujet [Levi 1906, 753][7].

Une référence sur le paramétrage elliptique des cubiques peut cependant être trouvée dans l'*Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*[8]. En effet, les deux chapitres consacrés l'un aux courbes cubiques et l'autre aux fonctions elliptiques font remonter l'énoncé et la preuve d'un tel paramétrage à un article de 1864 d'Alfred Clebsch (1833–1872), dans lequel ce dernier aurait utilisé le paramétrage pour démontrer un théorème sur des polygones associés à une courbe cubique [Clebsch 1864a][9]. Le cadre de cet article apparaît ainsi totalement déconnecté d'objectifs arithmétiques, au contraire des travaux plus tardifs

---

5 Voir [Goldstein 1993 ; Houzel 2004 ; Schappacher 1991 ; Schappacher & Schoof 1996]. Notons par ailleurs que le paramétrage elliptique des cubiques se trouve encore aujourd'hui dans de nombreux livres de théorie des nombres comme les classiques [Lang 1978, 10], [Silverman 1986, 158], [Husemöller 1987, 171].

6 Le *genre* d'une courbe est un nombre dépendant de son degré et de ses éventuels points singuliers. Les courbes cubiques sans point singulier sont des exemples de courbes de genre 1.

7 Voir aussi les articles [Levi 1908 ; 1909 ; Mordell 1922 ; Weil 1930]. Tous ces mémoires ont été localisés à partir des recherches historiques citées dans la note 5.

8 Rappelons que l'*Encyklopädie* est le fruit d'un projet collectif initié par Felix Klein à la fin du XIXe siècle et visant à établir un bilan des connaissances mathématiques de ce siècle. Voir [Gispert 1999 ; Tobies 1994].

9 Voir [Kohn 1908, 481], [Fricke 1913, 328]. Le chapitre de Robert Fricke évoque également (sans référence) deux autres paramétrages. Le premier, basé sur la forme dite de Legendre $y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$ de l'équation d'une cubique, semble être dû à Ferdinand Lindemann : voir [Clebsch & Lindemann 1876] et les commentaires faits à la page III. L'autre utilise la fameuse fonction $\wp$ définie par Karl Weierstrass dans un cours de 1863 comme solution de l'équation différentielle $s'^2 = 4s^3 - g_2 s - g_3$ [Bottazzini & Gray 2013, 428]. On trouve le paramétrage $(x, y) = (\wp(u), \wp'(u))$, aujourd'hui classique et basé sur l'équation $y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3$ d'une cubique, dans un article de Max Simon [1876] et dans la thèse de Robert d'Esclaibes [1880], lequel semble ignorer Simon. Ces deux paramétrages sont en tout cas postérieurs à celui de Clebsch de 1864 et ne retiendront pas notre attention ici.