Astérisque
347, 2012, p. 103–165

LA CONJECTURE LOCALE DE GROSS-PRASAD POUR LES REPRÉSENTATIONS TEMPÉRÉES DES GROUPES SPÉCIAUX ORTHOGONAUX

par

Jean-Loup Waldspurger

Introduction

Soit F un corps local non archimédien de caractéristique nulle. Appelons espace quadratique un couple (V, q) où V est un espace vectoriel de dimension finie sur F et q est une forme bilinéaire symétrique et non dégénérée sur V. Fixons deux tels espaces quadratiques (V, q) et (V', q'). On note d et d' leurs dimensions et G et G' leurs groupes spéciaux orthogonaux. On suppose d pair et d' impair. On suppose donné un isomorphisme entre le plus grand des espaces et la somme orthogonale du plus petit et d'un espace quadratique qui est lui-même somme orthogonale de plans hyperboliques et d'une droite quadratique (D, q_D). Le plus petit des deux groupes G, G' est alors un sous-groupe du plus grand. On définit un élément $\nu_0 \in F^\times/F^{\times,2}$ en fixant un élément non nul $v_0 \in D$ et en posant

$$\nu_0 = \begin{cases} q_D(v_0, v_0)/2, & \text{si } d > d', \\ -q_D(v_0, v_0)/2, & \text{si } d < d'. \end{cases}$$

Soit σ, resp. σ', une représentation admissible et irréductible de $G(F)$, resp. $G'(F)$. Gross et Prasad ont défini une multiplicité $m(\sigma, \sigma')$ en [**7**]. Rappelons la définition dans deux cas extrêmes. Supposons $d' = d + 1$. Fixons des espaces E_σ et $E_{\sigma'}$ dans lesquels se réalisent les représentations σ et σ'. On note $\mathrm{Hom}_G(\sigma', \sigma)$ l'espace des applications linéaires $l : E_{\sigma'} \to E_\sigma$ telles que $l \circ \sigma'(g) = \sigma(g) \circ l$ pour tout $g \in G(F)$. La multiplicité $m(\sigma, \sigma')$ est la dimension de l'espace complexe $\mathrm{Hom}_G(\sigma', \sigma)$. Supposons maintenant $d = 0$. Le groupe G est égal à $\{1\}$ et la représentation σ disparaît. Le groupe G' est déployé. Fixons un sous-groupe unipotent maximal U' de G' et un caractère régulier $\psi_{U'}$ de $U'(F)$. On note $\mathrm{Hom}_{\psi_{U'}}(\sigma', \mathbb{C})$ l'espace des formes linéaires l sur $E_{\sigma'}$ telles que $l \circ \sigma'(u') = \psi_{U'}(u') l$ pour tout $u' \in U'(F)$. La multiplicité $m(\sigma')$ est la dimension de l'espace $\mathrm{Hom}_{\psi_{U'}}(\sigma', \mathbb{C})$. La définition générale est rappelée en 2.1 ci-dessous. D'après [**1**], [**18**] et [**5**] corollaire 15.2, on a toujours $m(\sigma, \sigma') \leq 1$.

On se limitera désormais aux représentations tempérées. Rappelons la classification conjecturale de ces représentations (conjecture de Langlands, précisée par Deligne et Lusztig). Notons W_F le groupe de Weil de $\bar{F}/F$, où $\bar{F}$ est une clôture algébrique de F et $W_{DF} = W_F \times SL(2,\mathbb{C})$ le groupe de Weil-Deligne. Notons $Sp(d'-1,\mathbb{C})$ le groupe symplectique d'un espace symplectique complexe de dimension $d'-1$. Notons $\Phi_{\text{temp}}(G')$ l'ensemble des classes de conjugaison par $Sp(d'-1,\mathbb{C})$ d'homomorphismes $\varphi : W_{DF} \to Sp(d'-1,\mathbb{C})$ qui vérifient quelques propriétés usuelles et qui sont tempérés, c'est-à-dire que leurs restrictions à W_F sont d'images relativement compactes. Considérons un tel φ. Poussons-le en un homomorphisme à valeurs dans $GL(d'-1,\mathbb{C})$. On peut alors le décomposer sous la forme

$$(1) \qquad \varphi = \bigoplus_{i\in I} l_i \varphi_i$$

où chaque φ_i est un homomorphisme irréductible de W_{DF} dans un groupe $GL(N(\varphi_i),\mathbb{C})$ et l_i est sa multiplicité. On note I^{symp} le sous-ensemble des $i \in I$ tels que $N(\varphi_i)$ est pair et, à conjugaison près, l'image de φ_i est contenue dans $Sp(N(\varphi_i),\mathbb{C})$. Notons S_φ le commutant de l'image de φ dans $Sp(d'-1,\mathbb{C})$ et S_φ^0 sa composante neutre. Le groupe S_φ/S_φ^0 est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{I^{\text{symp}}}$. Notons z_φ l'image dans ce groupe de l'élément central $-1 \in Sp(d'-1,\mathbb{C})$. Il s'identifie à $(l_i)_{i\in I^{\text{symp}}} \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{I^{\text{symp}}}$. Posons

$$\mu(G') = \begin{cases} 1, & \text{si } G' \text{ est déployé,} \\ -1, & \text{sinon,} \end{cases}$$

et notons $\mathcal{E}^{G'}(\varphi)$ l'ensemble des caractères ε du groupe S_φ/S_φ^0 tels que $\varepsilon(z_\varphi) = \mu(G')$. On conjecture que l'ensemble des classes d'isomorphie de représentations admissibles irréductibles et tempérées de $G'(F)$ est union disjointe de L-paquets $\Pi^{G'}(\varphi)$ indexés par les $\varphi \in \Phi_{\text{temp}}(G')$. Pour un tel φ, on conjecture que l'ensemble $\Pi^{G'}(\varphi)$ est en bijection avec $\mathcal{E}^{G'}(\varphi)$, on notera $\varepsilon \mapsto \sigma'(\varphi,\varepsilon)$ cette bijection. Ce paramétrage doit être compatible avec deux types d'endoscopie. D'une part avec l'endoscopie usuelle entre G' et ses groupes endoscopiques elliptiques. Ceux-ci sont des produits $G'_+ \times G'_-$ de groupes spéciaux orthogonaux déployés d'espaces quadratiques de dimensions d'_+ et d'_- impaires et telles que $d'_+ + d'_- = d' + 1$. On renvoie à 4.2 pour la description des propriétés que doivent vérifier les paramétrages relativement à ce type d'endoscopie. D'autre part, dans le cas où G' est déployé, on veut une compatibilité avec une endoscopie tordue. Usuellement, on considère G' comme un groupe endoscopique du groupe $GL(d'-1)$ tordu par un automorphisme extérieur. Mais G' est aussi un groupe endoscopique du groupe $GL(d')$ tordu et c'est ce cas d'endoscopie que nous utiliserons. Plus précisément, notons θ l'automorphisme usuel $g \mapsto {}^t g^{-1}$ de $GL(d')$. Introduisons le groupe $GL(d') \rtimes \{1,\theta\}$ et sa composante non neutre $\tilde{GL}(d')$. Notons $\mathbf{1}$ la représentation triviale de dimension 1 de W_{DF}. Soit $\varphi \in \Phi_{\text{temp}}(G')$, posons $\varphi_> = \varphi \oplus \mathbf{1}$. La correspondance de Langlands, prouvée par Harris-Taylor ([**8**]) et Henniart ([**9**]), associe à $\varphi_>$ une représentation admissible irréductible $\pi(\varphi_>)$ de $GL(d',F)$. Elle est tempérée et autoduale, donc se prolonge en une représentation de $GL(d',F)\rtimes\{1,\theta\}$. On normalise cette extension de façon adéquate et on note $\tilde{\pi}(\varphi_>)$ sa restriction à $\tilde{GL}(d',F)$. On définit son caractère $\Theta_{\tilde{\pi}(\varphi_>)}$. De même, pour toute représentation irréductible σ' de $G'(F)$, on note $\Theta_{\sigma'}$ son caractère. On pose

$$\Theta^{G'}(\varphi)=\sum_{\sigma'\in\Pi^{G'}(\varphi)}\Theta_{\sigma'}.$$

On conjecture alors que $\Theta^{G'}(\varphi)$ est une distribution stablement invariante sur $G'(F)$ et qu'il existe un nombre complexe $c^{G'}(\varphi)$ de module 1 tel que $c^{G'}(\varphi)\Theta_{\tilde{\pi}(\varphi_>)}$ soit le transfert endoscopique de $\Theta^{G'}(\varphi)$.

Rappelons plus succinctement la paramétrisation conjecturale des représentations tempérées de $G(F)$ (on utilise la formulation de **[12]**). Fixons un « espace quadratique complexe » de dimension d, notons $O(d,\mathbb{C})$ et $SO(d,\mathbb{C})$ son groupe orthogonal, resp. spécial orthogonal. Considérons un homomorphisme $\varphi: W_{DF}\to O(d,\mathbb{C})$. En composant avec le déterminant, on obtient un caractère quadratique de W_{DF} qui est forcément trivial sur $SL(2,\mathbb{C})$ et se restreint en un caractère de W_F. Par la théorie du corps de classes, celui-ci détermine un élément $\delta(\varphi)\in F^\times/F^{\times,2}$. On définit un autre élément de ce groupe par $\delta(q)=(-1)^{d/2}\mathrm{det}(q)$. Notons $\Phi_{\mathrm{temp}}(G)$ l'ensemble des classes de conjugaison par $SO(d,\mathbb{C})$ d'homomorphismes $\varphi: W_{DF}\to O(d,\mathbb{C})$ qui sont tempérés et tels que $\delta(\varphi)=\delta(q)$. Considérons un tel φ. En le poussant en un homomorphisme à valeurs dans $GL(d,\mathbb{C})$, on peut le décomposer sous la forme (1). On note I^{orth} le sous-ensemble des $i\in I$ tels que, à conjugaison près, l'image de φ_i soit contenue dans $O(N(\varphi_i),\mathbb{C})$. Notons S_φ le commutant de l'image de φ dans $SO(d,\mathbb{C})$ et S_φ^0 sa composante neutre.Le groupe S_φ/S_φ^0 est isomorphe à un sous-groupe de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{I^{\mathrm{orth}}}$. Notons z_φ l'image dans ce groupe de l'élément central $-1\in SO(d,\mathbb{C})$. Il s'identifie à $(l_i)_{i\in I^{\mathrm{orth}}}\in(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{I^{\mathrm{orth}}}$. Si $\delta(q)=1$, on pose

$$\mu(G)=\begin{cases}1, & \text{si } G \text{ est déployé,}\\ -1, & \text{sinon.}\end{cases}$$

Si $\delta(q)\neq 1$, le groupe G est toujours quasi-déployé. Dans ce cas, on fixe $\mu(G)\in\{\pm 1\}$. Notons $\mathcal{E}^G(\varphi)$ l'ensemble des caractères ε du groupe S_φ/S_φ^0 tels que $\varepsilon(z_\varphi)=\mu(G)$. On conjecture que l'ensemble des classes d'isomorphie de représentations admissibles irréductibles et tempérées de $G(F)$ est union disjointe de L-paquets $\Pi^G(\varphi)$ indexés par les $\varphi\in\Phi_{\mathrm{temp}}(G)$. Pour un tel φ, on conjecture que l'ensemble $\Pi^G(\varphi)$ est en bijection avec $\mathcal{E}^G(\varphi)$, on notera $\varepsilon\mapsto\sigma(\varphi,\varepsilon)$ cette bijection. Ces paramétrages doivent être compatibles avec l'endoscopie entre G et ses groupes endoscopiques elliptiques. Ceux-ci sont des produits $G_+\times G_-$ de groupes spéciaux orthogonaux quasi-déployés d'espaces quadratiques de dimensions paires, leurs dimensions et discriminants devant satisfaire certaines égalités. D'autre part, dans le cas où $\mu(G)=1$, les paramétrages doivent être compatibles avec l'endoscopie entre G et le groupe $GL(d)$ tordu.

Revenons un instant sur la définition de $\mu(G)$. Comme on le sait, pour un discriminant δ fixé, il y a deux classes d'isomorphie d'espaces quadratiques (V,q) de dimension

d et de discriminant $\delta(q) = \delta$ (du moins si $d \geq 4$). Pour $\delta = 1$, les groupes spéciaux orthogonaux de ces deux espaces sont différents : l'un est déployé et l'autre n'est pas quasi-déployé. Par contre, si $\delta \neq 1$, les deux espaces ont le même groupe spécial orthogonal, qui est quasi-déployé. La division traditionnelle entre groupes quasi-déployés et groupes non quasi-déployés n'est pas assez fine pour notre propos et le signe $\mu(G)$ s'introduit dans les preuves pour distinguer les deux classes d'espaces quadratiques dont G est le groupe spécial orthogonal. Remarquons que, selon le choix de $\mu(G)$, on obtient des paramétrages des mêmes paquets $\Pi^G(\varphi)$ par des ensembles de caractères différents. La relation entre ces paramétrages est facile à expliciter, cf. 4.6.

Pour que les conjectures aient un sens, il faut définir précisément les notions de transfert, c'est-à-dire fixer des facteurs de transfert. C'est ce que l'on fait en 1.7 et 1.8. D'autre part, notre énoncé des conjectures laisse place à des constantes non précisées (par exemple la constante $c^{G'}(\varphi)$ ci-dessus). Un résultat préliminaire est que, quitte à modifier les paramétrages, on peut préciser ces constantes (lemme 4.8). Une fois cela fait, les paramétrages sont entièrement déterminés pour le groupe G' et le sont presque pour le groupe G, le « presque » provenant du problème délicat de la distinction entre conjugaison par le groupe spécial orthogonal et conjugaison par le groupe orthogonal tout entier, cf. ci-dessous. Les paramétrages pour le groupe G' sont indépendants de l'espace (V, q). Par contre, ceux pour le groupe G dépendent, sinon de l'espace (V', q'), du moins de l'élément $\nu_0 \in F^\times/F^{\times,2}$ que l'on a défini ci-dessus. Cela parce que cet élément nous sert à normaliser les facteurs de transfert.

Posons encore une définition. Pour deux entiers naturels N et N', avec N' pair, soient $\varphi : W_{DF} \to O(N, \mathbb{C})$ et $\varphi' : W_{DF} \to Sp(N', \mathbb{C})$ deux homomorphismes tempérés. Par la correspondance de Langlands, on leur associe des représentations irréductibles $\pi(\varphi)$ de $GL(N, F)$ et $\pi(\varphi')$ de $GL(N', F)$. On pose

$$E(\varphi, \varphi') = (\delta(\varphi), -1)_F^{N'/2} \varepsilon(1/2, \pi(\varphi) \times \pi(\varphi'), \psi_F).$$

Le premier terme est un symbole de Hilbert. Le second est le facteur ε de Jacquet, Piatetski-Shapiro et Shalika, défini à l'aide d'un caractère ψ_F de F. Il ne dépend pas de ce caractère et $E(\varphi, \varphi')$ est un élément de $\{\pm 1\}$.

Cela étant, soient $\varphi \in \Phi_{\text{temp}}(G)$ et $\varphi' \in \Phi_{\text{temp}}(G')$. On décompose φ et φ' sous la forme (1), en ajoutant des $'$ aux notations concernant φ'. On définit un caractère $\boldsymbol{\varepsilon}'$ de $S_{\varphi'}/S^0_{\varphi'} = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{(I')^{\text{symp}}}$ par

$$\boldsymbol{\varepsilon}'((e_{i'})_{i' \in (I')^{\text{symp}}}) = \prod_{i' \in (I')^{\text{symp}}} E(\varphi, \varphi'_{i'})^{e_{i'}}.$$

On définit un caractère $\boldsymbol{\varepsilon}$ de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{I^{\text{orth}}}$, que l'on restreint en un caractère de S_φ/S^0_φ, par

$$\boldsymbol{\varepsilon}((e_i)_{i \in I^{\text{orth}}}) = \prod_{i \in I^{\text{orth}}} E(\varphi_i, \varphi')^{e_i}.$$

Dans le cas où $\delta(q) = 1$, on vérifie que G et G' sont simultanément déployés ou non quasi-déployés. Autrement dit $\mu(G) = \mu(G')$. Dans le cas où $\delta(q) \neq 1$, on choisit désormais $\mu(G) = \mu(G')$. On vérifie que

$$\boldsymbol{\varepsilon}(z_\varphi) = \boldsymbol{\varepsilon}'(z_{\varphi'}) = E(\varphi, \varphi').$$

Si $E(\varphi, \varphi') = \mu(G')$, on a $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathscr{E}^G(\varphi)$ et $\boldsymbol{\varepsilon}' \in \mathscr{E}^{G'}(\varphi')$. Si $E(\varphi, \varphi') = -\mu(G')$, on a $\boldsymbol{\varepsilon} \notin \mathscr{E}^G(\varphi)$ et $\boldsymbol{\varepsilon}' \notin \mathscr{E}^{G'}(\varphi')$.

On admet la validité des conjectures ci-dessus. On en utilise la forme précisée par le lemme 4.8. Notre résultat principal est le théorème 4.9(i) dont voici l'énoncé.

Théorème. — *Soient $\varphi \in \Phi_{\mathrm{temp}}(G)$ et $\varphi' \in \Phi_{\mathrm{temp}}(G')$. Si $E(\varphi, \varphi') = -\mu(G')$, on a $m(\sigma, \sigma') = 0$ pour tous $\sigma \in \Pi^G(\varphi)$, $\sigma' \in \Pi^{G'}(\varphi')$. Si $E(\varphi, \varphi') = \mu(G')$, on a*

$$m(\sigma(\varphi, \boldsymbol{\varepsilon}), \sigma'(\varphi', \boldsymbol{\varepsilon}')) = 1$$

et $m(\sigma, \sigma') = 0$ pour tous $\sigma \in \Pi^G(\varphi)$, $\sigma' \in \Pi^{G'}(\varphi')$ tels que $(\sigma, \sigma') \neq (\sigma(\varphi, \boldsymbol{\varepsilon}), \sigma'(\varphi', \boldsymbol{\varepsilon}'))$.

C'est la conjecture 6.9 de [**7**], limitée aux représentations tempérées. On a admis les conjectures de classification. Dans un article récent encore sous forme provisoire, Arthur en démontre une bonne partie ([**3**] théorèmes 1.5.1 et 2.2.1). Plus précisément, il démontre celles concernant le groupe G' dans le cas où celui-ci est déployé. Pour le groupe G, dans le cas où celui-ci est quasi-déployé, il démontre un résultat un peu moins précis, où on ne distingue pas deux représentations conjuguées par le groupe orthogonal tout entier. Nous ignorons si la forme plus précise énoncée ci-dessus pourra se déduire de son résultat. Mais le théorème ci-dessus reste valable, sous une forme affaiblie, en utilisant le résultat d'Arthur (cf. le (ii) du théorème 4.9). Il est très probable que la version finale de l'article d'Arthur contiendra aussi le cas des groupes non quasi-déployés.

Un mot sur la démonstration. Soient φ, φ' comme dans l'énoncé ci-dessus et soient $\sigma \in \Pi^G(\varphi)$, $\sigma' \in \Pi^{G'}(\varphi')$. Dans [**16**], on a calculé $m(\sigma, \sigma')$ par une formule intégrale où interviennent les caractères de σ et σ'. En utilisant l'endoscopie ordinaire entre G, G' et leurs groupes endoscopiques, on peut exprimer ces caractères à l'aide de caractères stables (c'est-à-dire les $\Theta^{G'}(\varphi')$ ci-dessus), le prix à payer étant que ces caractères ne vivent pas sur les groupes de départ, mais sur leurs groupes endoscopiques (c'est le principe de base de l'endoscopie). Par endoscopie tordue, ces caractères stables s'expriment à l'aide de caractères sur des groupes tordus $\tilde{GL}(d'_+)$, $\tilde{GL}(d'_-)$ etc.. On obtient ainsi une expression de $m(\sigma, \sigma')$ en termes de tels caractères. Dans [**19**], on a démontré une formule, parallèle à celle de [**16**], qui calcule des facteurs ε de paires de représentations de groupes linéaires en termes du même genre de caractères. Il s'avère qu'à l'aide de cette formule, on peut transformer l'expression obtenue pour $m(\sigma, \sigma')$ en une autre où les intégrales de caractères tordus disparaissent et sont remplacées par des facteurs ε de paires. Il est alors aisé d'en déduire le théorème, puisque celui-ci dit justement que $m(\sigma, \sigma')$ se calcule à l'aide de tels facteurs.

Je remercie vivement C. Mœglin. Sans ses explications, cet article serait faux.