Astérisque
347, 2012, p. 167–216

LA CONJECTURE LOCALE DE GROSS-PRASAD POUR LES GROUPES SPÉCIAUX ORTHOGONAUX: LE CAS GÉNÉRAL

par

Colette Mœglin & Jean-Loup Waldspurger

Introduction

Soit F un corps local non archimédien de caractéristique nulle. On appelle espace quadratique un couple (V, q) formé d'un espace vectoriel V sur F de dimension finie et d'une forme bilinéaire q sur V, symétrique et non dégénérée. Soient (V, q) et (V', q') deux espaces quadratiques. On note d et d' leurs dimensions et G et G' leurs groupes spéciaux orthogonaux. On suppose $d > d'$ et d et d' de parités distinctes. On suppose donnée une décomposition orthogonale de (V, q) en la somme de (V', q') et d'un espace quadratique qui est lui-même somme orthogonale de plans hyperboliques et d'une droite quadratique (D, q_D). Le groupe G' est alors un sous-groupe de G. On définit $\nu_0 \in F^\times/F^{\times,2}$ en fixant un élément non nul $v_0 \in D$ et en posant

$$\nu_0 = (-1)^d q_D(v_0, v_0)/2.$$

Soient σ, resp. σ', une représentation admissible irréductible de $G(F)$, resp. $G'(F)$. Gross et Prasad ont défini une multiplicité $m(\sigma, \sigma')$. Par exemple, dans le cas où $d = d' + 1$, introduisons des espaces E_σ et $E_{\sigma'}$ dans lesquels se réalisent σ et σ'. Alors $m(\sigma, \sigma')$ est la dimension de l'espace complexe des applications linéaires $l : E_\sigma \to E_{\sigma'}$ telles que $l \circ \sigma(g') = \sigma'(g') \circ l$ pour tout $g' \in G'(F)$. La définition générale est rappelée en 1.2. D'après [**1**] et [**5**] corollaire 15.2, on a toujours $m(\sigma, \sigma') \leq 1$.

Rappelons la classification conjecturale des représentations admissibles irréductibles de $G(F)$ dans le cas d impair. Pour tout entier naturel pair N, on fixe une forme symplectique sur $\mathbb{C}^N$ et on note $Sp(N, \mathbb{C})$ son groupe symplectique. Notons W_F le groupe de Weil absolu de F et $W_{DF} = W_F \times SL(2, \mathbb{C})$ le groupe de Weil-Deligne. Notons $\Phi(G)$ l'ensemble des classes de conjugaison par $Sp(d-1, \mathbb{C})$ d'homomorphismes continus $\varphi : W_{DF} \to Sp(d-1, \mathbb{C})$ qui sont semi-simples et dont la restriction à $SL(2, \mathbb{C})$ est algébrique. On conjecture que l'ensemble des classes de représentations admissibles irréductibles de $G(F)$ est union disjointe de L-paquets $\Pi^G(\varphi)$ indexés par les $\varphi \in \Phi(G)$. Cette classification se ramène à celle des représentations tempérées de la façon suivante. Considérons les données suivantes :

– un Lévi $\hat{L} = GL(d_1, \mathbb{C}) \times \cdots \times GL(d_t, \mathbb{C}) \times Sp(d_0 - 1, \mathbb{C})$ de $Sp(d-1, \mathbb{C})$;
– des homomorphismes $\varphi_0 : W_{DF} \to Sp(d_0 - 1, \mathbb{C})$ et $\varphi_j : W_{DF} \to GL(d_j, \mathbb{C})$ pour $j = 1, \ldots, t$, vérifiant les mêmes conditions que φ et qui sont tempérés, c'est-à-dire que les images de W_F par ces homomorphismes sont relativement compactes ;
– des réels $b_1 > b_2 > \cdots > b_t > 0$.

Notons $|.|_F$ la valeur absolue usuelle de $F^\times$, que l'on identifie par la théorie du corps de classes à un caractère de W_F, puis de W_{DF}. Introduisons l'homomorphisme

$$\varphi^{\hat{L}} = (\varphi_1 \otimes |.|_F^{b_1}) \otimes \cdots \otimes (\varphi_t \otimes |.|_F^{b_t}) \otimes \varphi_0$$

de W_{DF} dans $\hat{L}$. En le poussant par l'inclusion de $\hat{L}$ dans $Sp(d-1, \mathbb{C})$, il devient un élément de $\Phi(G)$. Inversement, soit $\varphi \in \Phi(G)$. Alors il existe des données comme ci-dessus, uniques à conjugaison près, de sorte que $\varphi = \varphi^{\hat{L}}$. Il peut ne correspondre à $\hat{L}$ aucun Lévi de G (c'est le cas si G n'est pas déployé et $d_0 = 1$). Dans ce cas, on pose $\Pi^G(\varphi) = \varnothing$ et, pour unifier les notations, $S(\varphi)/S(\varphi)^0 = \{1\}$, $\mathcal{E}^G(\varphi) = \varnothing$. Supposons qu'à $\hat{L}$ corresponde un Lévi L de G. On a

$$L = GL(d_1) \times \cdots \times GL(d_t) \times G_0,$$

où G_0 est un groupe de même type que G. Pour tout $j = 1, \ldots, t$, notons $\pi(\varphi_j)$ la représentation admissible irréductible de $GL(d_j, F)$ qui correspond à φ_j par la correspondance de Langlands, prouvée par Harris-Taylor et Henniart. Admettons la conjecture pour les représentations tempérées. A φ_0 correspond un L-paquet $\Pi^{G_0}(\varphi_0)$ de représentations tempérées de $G_0(F)$. Soit P le sous-groupe parabolique de G, de composante de Lévi L, pour lequel la suite $(b_1, \ldots, b_t)$ est positive dans un sens usuel. Pour $\sigma_0 \in \Pi^{G_0}(\varphi_0)$, notons σ le quotient de Langlands de la représentation induite

$$\mathrm{Ind}_P^G((\pi(\varphi_1) \otimes |\det|_F^{b_1}) \otimes \cdots \otimes (\pi(\varphi_t) \otimes |\det|_F^{b_t}) \otimes \sigma_0),$$

c'est-à-dire son unique quotient irréductible. On note $\Pi^G(\varphi)$ l'ensemble de ces représentations σ quand σ_0 décrit $\Pi^{G_0}(\varphi_0)$. Rappelons que le paquet $\Pi^{G_0}(\varphi_0)$ est paramétré (conjecturalement) par un ensemble $\mathcal{E}^{G_0}(\varphi_0)$ de caractères d'un groupe $S(\varphi_0)/S(\varphi_0)^0$ isomorphe à un produit de facteurs $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On a rappelé ce paramétrage en **[15]** 4.2, on le note $\varepsilon \mapsto \sigma(\varphi_0, \varepsilon)$. On pose $S(\varphi)/S(\varphi)^0 = S(\varphi_0)/S(\varphi_0)^0$, $\mathcal{E}^G(\varphi) = \mathcal{E}^{G_0}(\varphi_0)$ et, pour un élément $\varepsilon \in \mathcal{E}^G(\varphi)$, on note $\sigma(\varphi, \varepsilon)$ la représentation déduite de $\sigma_0 = \sigma(\varphi_0, \varepsilon)$.

Les représentations de $G(F)$ se paramètrent de façon similaire dans le cas où d est pair. Pour tout entier naturel N, on fixe une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur $\mathbb{C}^N$ et on note $O(N, \mathbb{C})$, resp. $SO(N, \mathbb{C})$, son groupe orthogonal, resp. spécial orthogonal. Considérons un homomorphisme $\varphi : W_{DF} \to O(N, \mathbb{C})$ vérifiant les mêmes conditions que précédemment. Par composition avec le déterminant, on obtient un caractère quadratique de W_{DF}, forcément trivial sur $SL(2, \mathbb{C})$, donc un caractère quadratique de W_F. Par la théorie du corps de classes, il détermine un élément

$\delta(\varphi) \in F^\times/F^{\times,2}$. Définissons un autre élément de ce groupe par $\delta(q) = (-1)^{d/2}\det(q)$. On note $\Phi(G)$ l'ensemble des classes de conjugaison par $SO(d,\mathbb{C})$ d'homomorphismes $\varphi : W_{DF} \to O(d,\mathbb{C})$ vérifiant les conditions précédentes et tels que $\delta(\varphi) = \delta(q)$. Pour $\varphi \in \Phi(G)$, on définit comme ci-dessus le L-paquet $\Pi^G(\varphi)$: ou bien il est vide, ou bien c'est l'ensemble des quotients de Langlands issus de représentations $\pi(\varphi_j) \otimes |\det|_F^{b_j}$ de groupes $GL(d_j,F)$ et des éléments σ_0 d'un L-paquet $\Pi^{G_0}(\varphi_0)$. Le L-paquet est paramétré par un ensemble $\mathcal{E}^G(\varphi) = \mathcal{E}^{G_0}(\varphi_0)$ de caractères d'un groupe $S(\varphi)/S(\varphi)^0 = S(\varphi_0)/S(\varphi_0)^0$ produit de facteurs $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Signalons toutefois que, pour associer un Lévi L de G à un Lévi $\hat{L}$ de $O(d,\mathbb{C})$, il faut considérer $O(d,\mathbb{C})$ comme le L-groupe de G, ce qui sous-entend que l'on fixe des données supplémentaires cachées (précisément, on identifie un sous-tore maximal de $SO(d,\mathbb{C})$ au L-groupe d'un sous-tore maximal de G).

On admet la validité des conjectures pour les représentations tempérées, telles qu'on les a formulées en **[15]** 4.2 et 4.3, complétées comme en 2.1 ci-dessous dans le cas d impair. Dans **[15]** 4.8, on a précisé les paramétrages des L-paquets tempérés et ce sont ces paramétrages que nous utilisons. Les paramétrages des L-paquets de $G(F)$ ne dépendent d'aucune donnée auxiliaire dans le cas où d est impair. Ils dépendent par contre de l'élément ν_0 défini ci-dessus dans le cas où d est pair. Celui-ci sert à normaliser les facteurs de transfert.

Soit $\varphi \in \Phi(G)$. Si G est quasi-déployé, on dit que φ est générique s'il existe $\sigma \in \Pi^G(\varphi)$ et un type de modèles de Whittaker de sorte que σ admette un modèle de ce type. Rappelons que si d est impair, il n'y a qu'un seul type de modèles de Whittaker tandis que, si d est pair, il y a plusieurs types de tels modèles, autant que d'orbites unipotentes régulières de $G(F)$. Si G n'est pas quasi-déployé, on introduit un espace quadratique $(\underline{V},\underline{q})$ de mêmes dimension et déterminant que (V,q), mais dont le groupe spécial orthogonal $\underline{G}$ est quasi-déployé. A φ est associé un L-paquet $\Pi^{\underline{G}}(\varphi)$ de représentations de $\underline{G}(F)$. On dit que φ est générique s'il existe un élément $\underline{\sigma}$ de ce paquet et un type de modèles de Whittaker de sorte que $\underline{\sigma}$ admette un modèle de ce type.

On peut évidemment remplacer G par G' dans les considérations ci-dessus. Soient $\varphi \in \Phi(G)$ et $\varphi' \in \Phi(G')$. En suivant Gross et Prasad, on a défini en **[15]** 4.9 un signe $E(\varphi,\varphi')$ et des caractères $\boldsymbol{\varepsilon}$ de $S(\varphi)/S(\varphi)^0$ et $\boldsymbol{\varepsilon}'$ de $S(\varphi')/S(\varphi')^0$. On pose

$$\mu(G,G') = \begin{cases} 1, & \text{si } G \text{ et } G' \text{ sont quasi-déployés,} \\ -1, & \text{sinon.} \end{cases}$$

On sait que si $E(\varphi,\varphi') = \mu(G,G')$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ appartient à $\mathcal{E}^G(\varphi)$ et $\boldsymbol{\varepsilon}'$ appartient à $\mathcal{E}^{G'}(\varphi')$. Si au contraire $E(\varphi,\varphi') = -\mu(G,G')$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ n'appartient pas à $\mathcal{E}^G(\varphi)$ et $\boldsymbol{\varepsilon}'$ n'appartient pas à $\mathcal{E}^{G'}(\varphi')$.

Notre principal résultat est le théorème suivant, qui sera démontré dans la section 3.

Théorème 0.1. — *Soient $\varphi \in \Phi(G)$ et $\varphi' \in \Phi(G')$. On suppose φ et φ' génériques. Alors :*

(i) *toutes les représentations induites dont les éléments de* $\Pi^G(\varphi)$ *et de* $\Pi^{G'}(\varphi')$ *sont les quotients de Langlands sont irréductibles ;*

(ii) *si* $E(\varphi,\varphi') = -\mu(G,G')$*, on a* $m(\sigma,\sigma') = 0$ *pour tous* $\sigma \in \Pi^G(\varphi)$, $\sigma' \in \Pi^{G'}(\varphi')$ *;*

(iii) *si* $E(\varphi,\varphi') = \mu(G,G')$*, on a*

$$m(\sigma(\varphi,\varepsilon),\sigma'(\varphi',\varepsilon')) = 1$$

et $m(\sigma,\sigma') = 0$ *pour tous* $\sigma \in \Pi^G(\varphi)$, $\sigma' \in \Pi^{G'}(\varphi')$ *tels que* $(\sigma,\sigma') \neq (\sigma(\varphi,\varepsilon),\sigma'(\varphi',\varepsilon'))$.

Pour d impair, et pour un groupe déployé, les conjectures de classification des représentations de $G(F)$ sont maintenant prouvées par Arthur ([**3**], théorèmes 1.5.1 et 2.2.1). Dans le cas d pair, et pour un groupe quasi-déployé, Arthur démontre un résultat un peu plus faible, où on ne distingue pas deux représentations conjuguées par le groupe orthogonal tout entier, cf. [**15**] 4.4 et 2.1 ci-dessous. En utilisant seulement cette formulation plus faible (en l'admettant dans le cas non quasi-déployé), on peut énoncer un théorème similaire à celui ci-dessus, où on regroupe les représentations conjuguées par le groupe orthogonal.

Il y a trois ingrédients dans la preuve du théorème. En précisant un raisonnement dû à Gan, Gross et Prasad, on prouve dans la première section que les multiplicités sont compatibles à l'induction, sous des hypothèses convenables (proposition 1.3). Cela ramène les assertions (ii) et (iii) du théorème au cas tempéré, pourvu que toutes les induites intervenant soient irréductibles, c'est-à-dire pourvu que l'assertion (i) soit vérifiée. Signalons que les résultats de cette section 1 sont indépendants de toute conjecture. Dans la deuxième section, on établit un critère général d'irréductibilité pour ces induites (théorème 2.13). Signalons qu'il est également vrai pour les groupes symplectiques. La conséquence de ce critère est que, parmi ces induites, il y en a qui sont « les plus réductibles » qu'il est possible. C'est-à-dire que si l'une des induites est réductible, celles-ci le sont aussi. Ce sont celles pour lesquelles la représentation que l'on induit admet un modèle de Whittaker (il y en a plusieurs s'il y a plusieurs types de tels modèles). Pour obtenir le (i) du théorème, il reste à utiliser une conjecture de Shahidi démontrée par Muic qui affirme que si un quotient de Langlands est générique (ce qui fait partie de nos hypothèses : les paquets sont génériques), alors l'induite dont il est quotient est irréductible. Les assertions (ii) et (iii) du théorème sont prouvées dans la section 3.

Dans la section 4, nous prouvons un résultat dont nous nous servons, à savoir que tout paquet tempéré d'un groupe symplectique ou spécial orthogonal quasi-déployé contient une unique représentation possédant un modèle de Whittaker d'un type fixé. Grâce à Arthur, ce résultat ne dépend plus d'aucune conjecture dans le cas symplectique ou spécial orthogonal impair, et est encore partiellement conjectural dans le cas spécial orthogonal pair. Dans le cas du groupe spécial orthogonal impair, le même résultat se déduit de la méthode de la descente de Jiang et Soudry ([**6**]). Par ailleurs, un résultat un peu moins précis a été démontré par Konno ([**7**]).

Nous remercions le referee pour ses commentaires pertinents sur une première version de ce texte.

1. Induction et multiplicités

1.1. Notations. — Selon le cas, on désigne une représentation d'un groupe soit par la représentation elle-même, disons π, soit par un espace E_π dans lequel elle se réalise. On introduira parfois une représentation σ d'un groupe spécial orthogonal sans préciser au départ de quel groupe il s'agit. Dans ce cas, on notera d_σ la dimension de l'espace quadratique (V,q) du groupe spécial orthogonal duquel σ est une représentation. De même, on introduira parfois une représentation π d'un groupe linéaire (on entend par là un groupe $GL(d,F)$) sans préciser ce groupe. On notera d_π l'entier tel que π est une représentation de $GL(d_\pi,F)$. On note $\check{\sigma}$ la contragrédiente d'une représentation σ.

Soient (V,q) un espace quadratique de groupe spécial orthogonal G et σ une représentation lisse de $G(F)$. La notation

$$\sigma = \pi_1 \times \cdots \times \pi_t \times \sigma_0,$$

ou encore

$$\sigma = (\times_{i=1,\dots,t}\pi_i) \times \sigma_0$$

signifie ce qui suit. On fixe une décomposition

$$V = X_1 \oplus \cdots \oplus X_t \oplus V_0 \oplus Y_t \oplus \cdots \oplus Y_1.$$

On suppose que les espaces X_i et Y_i sont totalement isotropes et non nuls. En posant $V_i = X_i \oplus Y_i$ pour $i = 1,\dots,t$, on suppose que les espaces V_i, pour $i = 0,\dots,t$ sont orthogonaux. On note d_i la dimension de X_i (ou encore celle de Y_i) et d_0 celle de V_0. On note P le sous-groupe parabolique de G qui conserve le drapeau

$$X_1 \subset X_1 \oplus X_2 \subset \cdots \subset X_1 \oplus \cdots \oplus X_t,$$

U son radical unipotent et M sa composante de Lévi formée des éléments qui conservent tous les espaces X_i et Y_i. On note G_0 le groupe spécial orthogonal de V_0 et on fixe une base de X_i qui permet de noter $GL(d_i)$ le groupe linéaire de l'espace X_i. On a l'égalité

$$M = GL(d_1) \times \cdots \times GL(d_t) \times G_0.$$

Le terme σ_0 est une représentation lisse de $G_0(F)$ et, pour tout $i = 1,\dots,t$, π_i est une représentation lisse de $GL(d_i,F)$. Alors σ est la représentation

$$\mathrm{Ind}_P^G(\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_t \otimes \sigma_0)$$

de $G(F)$.

Dans le cas où la dimension d de V est paire, cette notation est ambigüe car cette représentation induite peut dépendre du choix de la décomposition de V. En pratique, l'important sera que ces décompositions soient choisies de façon cohérentes.

On utilise une notation similaire

$$\pi = \pi_1 \times \cdots \times \pi_t = \times_{i=1,\dots,t}\pi_i$$

pour des représentations de groupes linéaires.