350

ASTÉRISQUE

2013

L'ENSEMBLE DE ROTATION AUTOUR D'UN POINT FIXE

Frédéric Le Roux

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Astérisque est un périodique de la Société mathématique de France.

Numéro 350, 2013

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
smf@smf.univ-mrs.fr

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 35 € ($ 52)
Abonnement Europe : 484 €, hors Europe : 523 € ($ 784)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Astérisque
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN 0303-1179

ISBN 978-2-85629-366-9

Directrice de la publication : Aline Bonami

350 ASTÉRISQUE

2013

L'ENSEMBLE DE ROTATION AUTOUR D'UN POINT FIXE

Frédéric Le Roux

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Frédéric Le Roux
Université Paris Sud
Laboratoire de mathématiques, Bat. 425
91405 Orsay Cedex, France
lerouxf@math.jussieu.fr

***Classification mathématique par sujet* (2000).** — 37E30, 37C25.

Mots-clefs. — Homéomorphisme de surface, nombre de rotation, indice, orbites périodiques.

L'ENSEMBLE DE ROTATION AUTOUR D'UN POINT FIXE

Frédéric LE ROUX

Résumé. — Étant donné un point fixe pour un homéomorphisme de surface, on peut définir un *ensemble de rotation autour du point fixe*, qui est un invariant de conjugaison locale. Ce mémoire commence l'étude de cet invariant et de ces liens avec d'autres propriétés dynamiques, en particulier l'existence d'orbites périodiques, la différentiabilité au point fixe, l'indice de Poincaré-Lefschetz lorsque le point fixe est isolé.

***Abstract* (The rotation set around a fixed point for surface homeomorphisms).** — Given a fixed point for a surface homeomorphism, one can define a rotation set around this fixed point, which is a conjugacy invariant. We initiate the study of this invariant. In particular, we explore the links with other dynamical properties such as the existence of periodic orbits, the differentiability at the fixed point, the Poincaré-Lefschetz index when the fixed point is isolated.

TABLE DES MATIÈRES

AVANT-PROPOS

Ce texte traite de la dynamique topologique locale en dimension deux, autrement dit de l'itération d'un germe d'homéomorphisme de surface au voisinage d'un point fixe. Nous avons choisi d'aborder le sujet avec le point de vue de *l'ensemble de rotation*, qui décrit avec quelles vitesses les points proches du point fixe lui tournent autour, et en privilégiant, parmi les outils techniques, les *feuilletages transverses* introduits récemment par Patrice Le Calvez.

Le concept de nombre de rotation a été précisé dans des cadres variés : Henri Poincaré l'a introduit pour les homéomorphismes du cercle, Sol Schwartzman a proposé de l'étendre aux champs de vecteurs sur une variété quelconque, Michal Misiurewicz et Krystyna Ziemian ont étudié le cas des homéomorphismes isotopes à l'identité sur le tore de dimension deux ; on peut encore citer l'invariant de Calabi, ou *flux* des difféomorphismes symplectiques, qui est un nombre de rotation moyen. Dans le cadre qui nous intéresse ici, Patrice Le Calvez, seul ou avec Jean-Christophe Yoccoz, a défini des nombres de rotation dans certaines situations particulières. Auparavant V. A. Naishul[1] avait démontré que parmi les points fixes des difféomorphismes du plan, holomorphes ou préservant les aires, lorsque la différentielle est une rotation, l'angle de la rotation est un invariant de nature topologique. Jean-Marc Gambaudo et Élisabeth Pécou ont donné une preuve simple de ce résultat, et on peut extraire de leur argument une définition topologique de ce nombre de rotation. Cependant, une définition générale d'un ensemble de rotation pour les germes d'homéomorphismes de surface n'avait jamais été explicitée ; nous proposons de le faire ici, et d'en commencer l'étude systématique. Le texte contient également un panorama de résultats anciens de dynamique locale, révisités à la lumière de l'ensemble de rotation, et des énoncés nouveaux.

Organisation du texte. — Au premier chapitre, nous rappelons la définition du nombre de rotation dans le cercle, et de l'ensemble de rotation dans l'anneau compact. Nous étendons cette définition au cadre de l'anneau ouvert. Ce chapitre est destiné à aider le lecteur à aborder le chapitre suivant, même si sa lecture n'est pas nécessaire d'un point de vue logique. Le chapitre deux contient les définitions et les premières propriétés de deux invariants, l'*ensemble de rotation local* et l'*intervalle de rotation*

[1] Je n'ai malheureusement pas retrouvé le prénom de Monsieur Naishul.

local. Au chapitre trois nous étudions ce qui se passe lorsque « ça tourne », c'est-à-dire lorsque l'ensemble de rotation n'est ni vide ni réduit à $\{0\}$. Au quatrième chapitre, nous abordons le cas « sans rotation », et notamment l'étude des points fixes isolés dont l'indice de Poincaré-Lefschetz est différent de 1. L'épilogue contient la preuve d'un théorème de dynamique globale illustrant les objets utilisés dans ce texte. Enfin, il nous a paru utile de donner en appendice un aperçu de la dynamique locale des feuilletages, auxiliaires précieux du théorème feuilleté dans l'étude de la dynamique locale des homéomorphismes. Si l'on accepte de considérer les homéomorphismes comme des généralisations des feuilletages orientés, on pourra aussi lire cet appendice comme une introduction à notre étude.

Contenu. — Voici une liste des principaux résultats nouveaux du texte.

– On peut définir un intervalle de rotation local à l'aide de la dynamique sur les courbes passant par le point fixe (section 2.4, proposition 2.4.3).

– L'intervalle de rotation local coïncide avec l'enveloppe convexe de l'ensemble de rotation local (théorème 3.3.1).

– La possibilité d'éclater un point fixe pour le remplacer par un cercle, au sens de Gambaudo-Le Calvez-Pécou, est équivalente à la différentiabilité en ce point, à changement de coordonnées topologique près (proposition 2.3.5). Ces deux propriétés sont impliquées par l'existence d'un germe de courbe disjoint de tous ses itérés (proposition 2.3.3). Ces deux résultats ont été obtenus en collaboration avec François Béguin et Sylvain Crovisier.

– L'ensemble de rotation local permet de détecter certaines orbites périodiques (théorème 3.2.3, corollaire 4.5.2).

– La transversalité locale d'un feuilletage et d'une isotopie est une propriété ouverte (lemme 3.1.3).

Ce dernier lemme permet de perturber un feuilletage transverse pour simplifier sa topologie. Ceci en fait un auxiliaire précieux du théorème feuilleté équivariant de Patrice Le Calvez, en particulier dans la preuve du lien entre ensemble et intervalle de rotation. Le théorème feuilleté équivariant nous permet aussi d'obtenir des démonstrations nouvelles d'énoncés anciens, qui en sortent parfois renforcés : c'est le cas du théorème des trois-quatre points fixes de Matsumoto (théorème 5.1.1), ou pour l'étude des points fixes isolés d'indice différent de un (théorème 4.1.1 et addenda 4.1.2, 4.1.3, 4.1.4). Nous obtenons en particulier l'existence de secteurs « transversalement hyperboliques », sur lesquels on peut définir une « jolie » fonction de Lyapounov ; à nouveau, le lemme 3.1.3 joue ici un rôle clé.

Remerciements. — Ce texte est basé sur mon mémoire d'habilitation à diriger des recherche. Je remercie les membres du jury et/ou rapporteurs, Jerôme Buzzi, John Franks, Étienne Ghys, Lucien Guillou, Patrice Le Calvez, Jean-Christophe Yoccoz, de leur intérêt pour mon travail. En particulier, la relecture de Patrice m'a été précieuse, et a permis d'épargner au lecteur quelques grosses bêtises. Je remercie également