372

ASTÉRISQUE

2015

RIGIDITY OF HIGH DIMENSIONAL GRAPH MANIFOLDS

Roberto FRIGERIO, Jean-François LAFONT, Alessandro SISTO

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Astérisque est un périodique de la Société Mathématique de France.

Numéro 372, 2015

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
smf@smf.univ-mrs.fr

Hindustan Book Agency
O-131, The Shopping Mall
Arjun Marg, DLF Phase 1
Gurgaon 122002, Haryana
Inde

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 60 € ($ 90)

Abonnement Europe : 530 €, hors Europe : 569 € ($ 853)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Astérisque
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN 0303-1179

ISBN 978-2-85629-809-1

Directeur de la publication : Marc Peigné

372

ASTÉRISQUE

2015

RIGIDITY OF HIGH DIMENSIONAL GRAPH MANIFOLDS

Roberto FRIGERIO, Jean-François LAFONT, Alessandro SISTO

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Roberto Frigerio
Dipartimento di Matematica - Largo B. Pontecorvo, 5 - 56127 Pisa, Italy
frigerio@dm.unipi.it

Jean-François Lafont
Department of Mathematics, The Ohio State University, 231 West 18th Avenue, Columbus, OH 43210-1174, USA
jlafont@math.ohio-state.edu

Alessandro Sisto
Department of Mathematics, ETH Zurich, 8092 Zurich, Switzerland
sisto@math.ethz.ch

***Classification mathématique par sujet* (2000).** — 53C24, 20F65; 53C23, 20E08, 20F67, 20F69, 19D35.

Mots-clefs. — Quasi-isometry, quasi-action, graph of groups, CAT(0) space, Borel conjecture, smooth rigidity, Baum-Connes conjecture, asymptotic cone, mapping class group, Kazhdan's property (T), Tits' alternative, co-Hopf property, C^*-simplicity, SQ-universality.

RIGIDITY OF HIGH DIMENSIONAL GRAPH MANIFOLDS

by Roberto FRIGERIO, Jean-François LAFONT and Alessandro SISTO

Abstract. — We define the class of *high dimensional graph manifolds*. These are compact smooth manifolds supporting a decomposition into finitely many pieces, each of which is diffeomorphic to the product of a torus with a finite volume hyperbolic manifold with toric cusps. The various pieces are attached together via affine maps of the boundary tori. We require all the hyperbolic factors in the pieces to have dimension ≥ 3. Our main goal is to study this class of graph manifolds from the viewpoint of rigidity theory.

We show that, in dimensions ≥ 6, the Borel conjecture holds for our graph manifolds. We also show that smooth rigidity holds within the class: two graph manifolds are homotopy equivalent if and only if they are diffeomorphic. We introduce the notion of *irreducible* graph manifolds. These form a subclass which has better coarse geometric properties, in that various subgroups can be shown to be quasi-isometrically embedded inside the fundamental group. We establish some structure theory for finitely generated groups which are quasi-isometric to the fundamental group of an irreducible graph manifold: any such group has a graph of groups splitting with strong constraints on the edge and vertex groups. Along the way, we classify groups which are quasi-isometric to the product of a free abelian group and a non-uniform lattice in $SO(n,1)$. We provide various examples of graph manifolds which do *not* support any locally CAT(0) metric.

Several of our results can be extended to allow pieces with hyperbolic surface factors. We emphasize that, in dimension $= 3$, our notion of graph manifold *does not* coincide with the classical graph manifolds. Rather, it is a class of 3-manifolds that contains some (but not all) classical graph 3-manifolds (we don't allow general Seifert fibered pieces), as well as some non-graph 3-manifolds (we do allow hyperbolic pieces).

Résumé **(Rigidité des variétés graphées de grande dimension.)** — Ce texte est consacré à la définition et à l'étude systématique des *variétés graphées de grande dimension*. Celles-ci sont des variétés lisses, ayant une décomposition en un nombre fini de morceaux géométriques. Chaque morceau est difféomorphe au produit d'un tore et d'une variété hyperbolique de volume fini dont tous les bouts sont des tores. Les morceaux sont

recollés par des applications affines des tores qui en sont les bords. Nous exigeons que le facteur hyperbolique dans chaque morceau soit de dimension ≥ 3. Notre but principal est d'établir divers résultats de rigidité pour cette classe de variétés graphées.

Nous démontrons, en dimension ≥ 6, la conjecture de Borel pour les variétés graphées : une variété quelconque est homotopiquement équivalente à une variété graphée si et seulement si elle est homéomorphe à cette même variété graphée. Nous établissons la rigidité lisse pour la classe des variétés graphées : deux variétés graphées sont homotopiquement équivalentes si et seulement si elles sont difféomorphes. Du point de vue de la géométrie à grande échelle, la distorsion des groupes fondamentaux des morceaux dans le groupe fondamental de la variété graphée joue un rôle essentiel. Nous introduisons la notion de *variété graphée irréductible*. Elles forment une sous-classe pour laquelle ces sous-groupes sont toujours non-distordus. Ceci nous permet d'analyser la structure des groupes quasi-isométriques au groupe fondamental d'une variété graphée irréductible: un tel groupe a (virtuellement) une action sur un arbre, avec de fortes contraintes sur les stabilisateurs de sommets et d'arêtes. Cette analyse comprend, entre autre, une classification des groupes quasi-isométriques au produit d'un groupe abélien libre et d'un réseau non-uniforme dans $SO(n, 1)$. Nous présentons plusieurs exemples de variétés graphées qui n'admettent *aucune* métrique localement CAT(0).

Certains de nos résultats s'appliquent aussi bien en présence de morceaux ayant commes facteurs des surfaces hyperboliques. Nous précisons que, en dimension trois, notre notion de variété graphée *ne coïncide pas* avec la notion classique de variété graphée. Nos variétés forment une classe comprenant certaines des variétés graphées classiques (mais pas toutes: nous excluons certaines sous-variétés de Seifert), ainsi que des variétés que ne sont pas des variétés graphées classiques (nous admettons des morceaux purement hyperboliques).

CONTENTS