380 ASTÉRISQUE

2016

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2014/2015
EXPOSÉ N° 1089

Rémi COULON

Théorie de la petite simplification : une approche géométrique

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Astérisque est un périodique de la Société Mathématique de France.

Numéro 380

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
smf@smf.univ-mrs.fr

Hindustan Book Agency
O-131, The Shopping Mall
Arjun Marg, DLF Phase 1
Gurgaon 122002, Haryana
Inde

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 75 € ($ 112)

Abonnement Europe : 650 €, hors Europe : 689 € ($ 1 033)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Astérisque
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN 0303-1179

ISBN 978-85629-836-7

Directeur de la publication : Marc PEIGNÉ

Séminaire BOURBAKI Novembre 2014
67e année, 2014-2015, n° 1089, p. 1 à 33

THÉORIE DE LA PETITE SIMPLIFICATION : UNE APPROCHE GÉOMÉTRIQUE [d'après F. Dahmani, V. Guirardel, D. Osin et S. Cantat, S. Lamy]

par **Rémi COULON**

INTRODUCTION

La notion de courbure négative joue un rôle fondamental en *théorie géométrique des groupes*. Elle apparaît déjà dans les travaux de M. Dehn sur les groupes de surfaces. Étant donné un groupe de présentation finie, M. Dehn demande dans quelle mesure on peut trouver un algorithme capable de décider si un mot en les générateurs représente l'identité. Dans le cas du groupe fondamental G d'une surface Σ, il regarde le graphe de Cayley de G dessiné dans le plan hyperbolique, vu comme le revêtement universel de Σ, puis utilise la courbure négative pour résoudre le problème. V.A. Tartakovskiĭ en a extrait une condition combinatoire sur la présentation d'un groupe qui permet de généraliser les idées de M. Dehn. C'est la première formulation explicite de la *théorie de la petite simplification* [**54**]. Cette théorie, particulièrement fructueuse, a été par la suite largement étudiée notamment par M. Greendlinger [**24, 25**], R. Lyndon et P. Schupp [**38**], A.Y. Ol′shanskiĭ [**44**]. Statistiquement parlant, les groupes à petite simplification sont abondants [**45**]. C'est une source importante de groupes hyperboliques [**26**]. Par ailleurs la petite simplification permet de construire et étudier des groupes aux pathologies diverses : construction de Rips [**49**], monstre de Tarski [**45**], groupes de Burnside [**42, 43, 16**], etc.

Cependant les origines géométriques de la petite simplification ont petit à petit été oubliées au profit de méthodes combinatoires et topologiques. Selon les mots de M. Gromov [**28**] « *the role of curvature was reduced to a metaphor. (Algebraists do not trust geometry.)* ». Dans une série d'articles, M. Gromov propose un retour aux sources [**28, 27, 29**]. Il y développe un point de vue géométrique qui va bien au-delà du cadre usuel de la petite simplification.

La géométrie δ-hyperbolique introduite par M. Gromov à la fin des années 80 est une autre forme extrêmement importante de courbure négative [**26**]. Elle met en lumière les similarités entre les groupes de surfaces, les groupes kleiniens, les groupes opérant sur un arbre (théorie de Bass-Serre), les groupes à petite simplification, etc. L'idée est que si un groupe G agit sur un espace δ-hyperbolique X de façon « raisonnable » alors son comportement à large échelle présente des similarités avec les groupes libres ou les groupes fondamentaux de variétés hyperboliques. En particulier étant donnée une partie finie R d'un groupe hyperbolique G, on peut étendre la théorie de la petite simplification pour étudier le quotient de G par le sous-groupe distingué engendré par R [**10, 15**].

En généralisant ce point de vue, S. Cantat et S. Lamy ont montré que le groupe de Cremona n'est pas simple [**9**]. F. Dahmani, V. Guirardel et D. Osin ont revisité la petite simplification grâce aux familles de rotations [**14**]. Ils obtiennent ainsi un cadre commun pour étudier des groupes a priori très différents : groupes modulaires de surfaces, groupes des automorphismes extérieurs du groupe libre, groupes d'Artin à angles droits, etc. Le but de cet exposé est de présenter ces résultats.

Remarques. — Les travaux de F. Dahmani, V. Guirardel et D. Osin portent sur deux notions : les *groupes hyperboliquement plongés* et les *familles de rotations.* À première vue ces deux outils semblent différents, cependant la plupart de leurs résultats peuvent se démontrer avec l'un ou l'autre [**14**]. Les groupes hyperboliquement plongés généralisent la structure périphérique des groupes relativement hyperboliques. Dans cet exposé, nous abordons uniquement les familles de rotations qui sont de nature plus « dynamique ». Une partie de l'article original de S. Cantat et S. Lamy [**9**] généralise des techniques empruntées aux travaux de T. Delzant sur la petite simplification dans les groupes hyperboliques [**15**]. Nous adoptons ici le point de vue unificateur des familles de rotations.

1. THÉORIE DE LA PETITE SIMPLIFICATION

Rappelons en premier lieu le cadre usuel de la théorie de la petite simplification. Pour plus de détails on pourra lire [**38**, chapter V]. Soient S un ensemble fini et R une collection finie de mots cycliquement réduits sur l'alphabet $S \cup S^{-1}$. La longueur d'un mot m est notée $|m|$. On note R^* l'ensemble des conjugués cycliques des éléments de R et leurs inverses. Une pièce est un préfixe commun à deux éléments distincts de R^*. La présentation $\bar{G} = \langle S|R\rangle$ satisfait la condition $C'(\lambda)$ si pour toute pièce u, préfixe d'une relation $r \in R^*$, on a $|u| < \lambda|r|$. La théorie de la petite simplification s'intéresse au cas où λ est petit, en particulier inférieur à $1/6$. Le groupe fondamental Γ_g d'une