

380

ASTÉRISQUE

2016

SÉMINAIRE BOURBAKI  
VOLUME 2014/2015  
EXPOSÉ N° 1094

Gilles CARRON

*De nouvelles utilisations du principe  
du maximum en géométrie*

**SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE**

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

*Comité de rédaction*

Ahmed ABBES  
Viviane BALADI  
Laurent BERGER  
Gérard BESSON  
Philippe BIANE  
Hélène ESNAULT

Damien GABORIAU  
Michael HARRIS  
Fabrice PLANCHON  
Pierre SCHAPIRA  
Bertrand TOËN

Éric VASSEROT (dir.)

*Diffusion*

Maison de la SMF  
Case 916 - Luminy  
13288 Marseille Cedex 9  
France  
smf@smf.univ-mrs.fr

Hindustan Book Agency  
O-131, The Shopping Mall  
Arjun Marg, DLF Phase 1  
Gurgaon 122002, Haryana  
Inde

AMS  
P.O. Box 6248  
Providence RI 02940  
USA  
www.ams.org

*Tarifs*

*Vente au numéro* : 75 € (\$ 112)

*Abonnement* Europe : 650 €, hors Europe : 689 € (\$ 1 033)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

*Secrétariat : Nathalie Christiaën*

Astérisque

Société Mathématique de France

Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie

75231 Paris Cedex 05, France

Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96

revues@smf.ens.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2016

*Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.*

ISSN 0303-1179

ISBN 978-85629-836-7

Directeur de la publication : Marc PEIGNÉ

---



**DE NOUVELLES UTILISATIONS  
DU PRINCIPE DU MAXIMUM EN GÉOMÉTRIE  
[d'après B. Andrews, S. Brendle, J. Clutterbuck]**

par Gilles CARRON

**INTRODUCTION**

Le principe du maximum est un outil simple mais puissant pour étudier des problèmes géométriques qui se formulent à l'aide d'une équation aux dérivées partielles elliptique ou parabolique. Cet outil avait par exemple été utilisé par S.-T. Yau et T. Aubin dans la résolution du problème de Calabi pour obtenir des estimées a priori des solutions d'une équation de Monge-Ampère. Récemment, les techniques de doublement de variables conjuguée avec une application d'un principe du maximum ont permis de démontrer des résultats majeurs en théorie spectrale, dans l'étude des hypersurfaces de l'espace euclidien ou concernant la classification des tores à courbure moyenne constante de la sphère  $\mathbb{S}^3$ . B. Andrews et S. Brendle ont rédigé de très bons survols sur l'application de ces techniques en géométrie et sur leurs travaux [3, 5, 25, 27], aussi il sera préférable de se référer à ces textes pour avoir un aperçu plus complet et se rendre compte de la fécondité de ces idées.

Nous voulons ici illustrer l'efficacité et l'élégance de ces méthodes et nous avons choisi pour cela de présenter de façon relativement complète la résolution de deux problèmes célèbres : le premier, résolu par B. Andrews et J. Clutterbuck [8], fournit une minoration optimale de l'écart entre les deux premières valeurs propres du laplacien d'un domaine convexe (pour les conditions de Dirichlet), le second, résolu par S. Brendle [24], est la conjecture de H. B. Lawson suivant laquelle les tores plongés minimalement dans la sphère  $\mathbb{S}^3$  sont les tores de Clifford.

Nous omettrons cependant deux ou trois calculs assez longs qui sont très bien menés et expliqués dans les articles originaux et parfois l'argumentation proposée ici emprunte des idées apparues postérieurement. Par exemple, nous finaliserons la preuve du résultat de B. Andrews et J. Clutterbuck à l'aide d'une idée de L. Ni [54] et pour exposer la démonstration de la conjecture de H. B. Lawson, l'utilisation du

principe du maximum pour les équations elliptiques dégénérées de J.-M. Bony [21] sera remplacée par le principe du maximum pour les sous-solutions de viscosité ; cette formulation en terme de sous-solutions de viscosité s'est imposée par la suite dans les travaux de B. Andrews, M. Langford et J. McCoy [10] et de S. Brendle [28] à propos du mouvement par courbure moyenne des hypersurfaces de l'espace euclidien.

Les techniques présentées ici ont été largement utilisées ailleurs, elles sont par exemple incontournables lorsqu'il s'agit de démontrer un principe du maximum pour les sous-solutions de viscosité d'une EDP elliptique d'ordre 1 ou 2 [30]. On attribue à S. N. Kružkov la première utilisation de ces techniques qu'il utilisait pour estimer le module de continuité de la dérivée d'une solution d'EDP parabolique non linéaire en une dimension d'espace [47]. Cette technique a aussi été largement utilisée pour démontrer des estimations de convexité pour des solutions de certaines EDP, on pourra à ce propos consulter la seconde partie du mémoire de B. Kawohl qui est consacrée à ces questions [44]. C'est d'ailleurs cette technique qui a permis à N. Korevaar [45] de fournir une preuve particulièrement élégante du résultat suivant de H. J. Brascamp et E. H. Lieb [22] :

**THÉORÈME 0.1.** — *Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un domaine convexe et  $V: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction convexe, alors l'état fondamental de la réalisation de Dirichlet de l'opérateur*

$$-\Delta + V = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + V$$

*est log-concave.*

Afin d'illustrer les potentialités de cette méthode, nous esquissons ici la preuve fournie par N. Korevaar :

*Démonstration.* — Par approximation et continuité de l'état fondamental par rapport aux déformations du potentiel et du domaine, nous supposons que  $\partial\Omega$  et  $V$  sont lisses et strictement convexes. On considère alors l'état fondamental de la réalisation de Dirichlet de l'opérateur  $-\Delta + V = - \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + V$ , c'est-à-dire la fonction lisse  $f_1: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  strictement positive dans  $\Omega$ , nulle sur  $\partial\Omega$ ,  $L^2$ -unitaire et vérifiant l'équation :

$$-\Delta f_1 + V f_1 = \lambda_1 f_1.$$

On pose alors  $u := \ln f_1$  et on veut démontrer que la fonction

$$Z(x, y) = u(x) + u(y) - 2u\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

est négative sur  $\Omega \times \Omega$ . On peut démontrer que nos hypothèses impliquent que

$$\limsup_{(x,y) \rightarrow \partial(\Omega \times \Omega)} Z(x, y) = 0.$$