380

ASTÉRISQUE

2016

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2014/2015
EXPOSÉ N° 1095

Philippe EYSSIDIEUX

Métriques de Kähler-Einstein sur les variétés de Fano

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Astérisque est un périodique de la Société Mathématique de France.

Numéro 380

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
smf@smf.univ-mrs.fr

Hindustan Book Agency
O-131, The Shopping Mall
Arjun Marg, DLF Phase 1
Gurgaon 122002, Haryana
Inde

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 75 € ($ 112)

Abonnement Europe : 650 €, hors Europe : 689 € ($ 1 033)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Astérisque
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN 0303-1179

ISBN 978-85629-836-7

Directeur de la publication : Marc PEIGNÉ

Séminaire BOURBAKI Janvier 2015
67e année, 2014-2015, n° 1095, p. 207 à 229

MÉTRIQUES DE KÄHLER-EINSTEIN SUR LES VARIÉTÉS DE FANO [d'après Chen-Donaldson-Sun et Tian]

par **Philippe EYSSIDIEUX**

INTRODUCTION

Une *variété kählérienne* (X, ω) est une variété complexe de dimension finie $n = \dim_{\mathbb{C}}(X)$ munie d'une 2-forme réelle fermée ω s'exprimant dans un système de coordonnées holomorphes locales $(z^i)_{1\leq i\leq n}$ sous la forme :

$$\omega = \sqrt{-1} \sum_{1\leq i,j\leq n} g_{i\bar{j}} dz^i \wedge d\bar{z}^j,$$

où $(g_{i\bar{j}})_{1\leq i,j\leq n}$ est une matrice hermitienne définie positive à coefficients C^∞ de sorte que ω est de type $(1,1)$ pour la bigraduation naturelle des tenseurs induite par la structure complexe de X. La *courbure de Ricci* de (X, ω) est la $(1,1)$-forme Ric donnée en coordonnées locales par :

$$\mathrm{Ric} = \mathrm{Ric}(\omega) := -\sqrt{-1}\partial\bar{\partial} \log \det(g_{i\bar{j}}). \tag{1}$$

On notera que Ric ne dépend que de la forme volume ω^n. Moyennant l'identification entre formes volume et métriques hermitiennes sur le fibré anticanonique, $\mathrm{Ric}(\omega)$ n'est autre que la première forme de Chern-Weil de la métrique hermitienne sur le fibré en droites holomorphe anticanonique $\Lambda^n T_X$ attachée à ω^n multipliée par 2π.

On dit que (X, ω) est *Kähler-Einstein* si $\mathrm{Ric}(\omega) = \lambda\omega$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$.

Dans le cas $\lambda \leq 0$, les conditions nécessaires et suffisantes d'existence de métriques de Kähler-Einstein sur une variété X compacte ont été élucidées par Aubin (pour $\lambda < 0$) et Yau [**1, 44**], voir [**11**]. Le cas $\lambda > 0$ est plus compliqué. Il est nécessaire que X soit projective-algébrique et même *Fano* (c. à. d. que le fibré anticanonique est ample) et que la classe de cohomologie de De Rham $\{\omega\}$ soit $\frac{2\pi}{\lambda}c_1(X)$. Par un théorème de Matsushima, l'algèbre de Lie des champs de vecteurs holomorphes d'une variété de Kähler-Einstein doit aussi être réductive mais bien d'autres obstructions ont été découvertes, voir [**12**].

On définira plus loin la notion de K-stabilité pour une variété de Fano. Il suffit de dire ici que cette condition est purement algébro-géométrique et ressemble à une condition de stabilité au sens de la théorie géométrique des invariants, comme prédit originellement par Yau.

THÉORÈME 0.1 ([**21**], voir aussi [**42**]). — *Une variété de Fano admet une métrique de Kähler-Einstein si et seulement si elle est K-stable.*

On donnera les grandes lignes de la preuve en suivant les références [**19, 20, 21**].

Notations : Dans ce qui suit, (X, ω) désigne une variété de Fano munie d'une métrique kählérienne dans $2\pi c_1(X)$ (on pose donc $\lambda = 1$). On note $V = (2\pi)^n c_1(X)^n$ son volume.

Pour L un fibré en droites holomorphe sur X et $\theta \in 2\pi c_1(L)$ un courant positif (ou même s'écrivant localement comme la somme d'un courant positif fermé et d'une forme régulière) de bidegré $(1,1)$ fermé, on note $| \ |_\theta$ la métrique hermitienne.

Pour D un diviseur de Cartier sur X (ou une variété à singularités arbitraires) on note $O(D) := O_X(D)$ le fibré en droites holomorphe attaché au faisceau inversible $\mathcal{O}_X(D)$. En particulier $\Lambda^n T_X = O(-K_X)$.

1. LA MÉTHODE DE CONTINUITÉ CONIQUE DE DONALDSON

1.1. Méthode de continuité d'Aubin-Yau

On rappelle l'approche classique à l'existence de métriques de Kähler-Einstein. Toute métrique kählérienne dans la classe $\{\omega\}$ se laisse représenter sous la forme $\omega_\phi := \omega + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\phi$ où

$$\phi \in P(X, \omega) := \{\phi \in C^\infty(X, \mathbb{R}),\ \omega_\phi > 0\}.$$

Le *potentiel de Ricci* de ω est l'unique fonction $h \in C^\infty(X, \mathbb{R})$ telle que

$$\mathrm{Ric}(\omega) - \omega = \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}h, \quad \int_X (e^h - 1)\omega^n = 0.$$

La méthode de continuité d'Aubin-Yau consiste à établir l'existence pour tout $t \in [0,1]$ d'une solution de l'équation de Monge-Ampère complexe

$$(\omega_{\phi_t})^n = e^{h - t\phi_t}\omega^n,\ \phi_t \in P(X, \omega), \tag{2}$$

ce qui équivaut à la relation $\mathrm{Ric}(\omega_{\phi_t}) = t\omega_{\phi_t} + (1-t)\omega$. On introduit I^{AY} l'ensemble des t pour lesquels (2) est compatible. I^{AY} est alors non vide (il contient $t = 0$