380

ASTÉRISQUE

2016

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2014/2015
EXPOSÉ N° 1096

David HARARI

Zéro-cycles et points rationnels sur les fibrations en variétés rationnellement connexes

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Astérisque est un périodique de la Société Mathématique de France.

Numéro 380

Diffusion

Maison de la SMF	Hindustan Book Agency	AMS
Case 916 - Luminy	O-131, The Shopping Mall	P.O. Box 6248
13288 Marseille Cedex 9	Arjun Marg, DLF Phase 1	Providence RI 02940
France	Gurgaon 122002, Haryana	USA
`smf@smf.univ-mrs.fr`	Inde	`www.ams.org`

Tarifs

Vente au numéro : 75 € ($ 112)
Abonnement Europe : 650 €, hors Europe : 689 € ($ 1 033)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Astérisque
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
`revues@smf.ens.fr` • `http://smf.emath.fr/`

ISSN 0303-1179

ISBN 978-85629-836-7

Directeur de la publication : Marc PEIGNÉ

Séminaire BOURBAKI Janvier 2015
67e année, 2014-2015, no 1096, p. 231 à 262

ZÉRO-CYCLES ET POINTS RATIONNELS SUR LES FIBRATIONS EN VARIÉTÉS RATIONNELLEMENT CONNEXES
[d'après Harpaz et Wittenberg]

par **David HARARI**

INTRODUCTION

Soit k un corps de nombres, c'est-à-dire une extension finie du corps $\mathbf{Q}$. Soit X une variété algébrique sur k, définie par exemple dans l'espace affine $\mathbf{A}_k^n$ par un système d'équations polynomiales à coefficients dans k :

$$P_i(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad 1 \leq i \leq r \tag{1}$$

ou encore dans l'espace projectif $\mathbf{P}_k^n$ par un système d'équations polynomiales homogènes

$$P_i(x_0, \dots, x_n) = 0, \quad 1 \leq i \leq r. \tag{2}$$

C'est un problème très ancien de déterminer si l'ensemble $X(k)$ des points rationnels de X est non vide, autrement dit de savoir si le système (1) possède une solution (resp. le système (2) possède une solution non triviale) à coefficients dans k. La question est a priori très difficile, et il n'est pas impossible qu'elle soit indécidable en général (c'est le cas de la question analogue pour les points entiers, d'après les travaux de Davis, Putnam, Robinson et Matiasevic dans les années soixante, cf. [**1**]).
Il est néanmoins possible de dégager des conditions nécessaires pour avoir $X(k) \neq \varnothing$. Considérons les diverses complétions k_v de k, où v décrit l'ensemble Ω des *places* (:= classes d'équivalence de valeurs absolues non triviales) du corps k. Par exemple si $k = \mathbf{Q}$, ces complétés sont les corps p-adiques $\mathbf{Q}_p$ pour p premier et le complété archimédien $\mathbf{R}$. Une condition nécessaire évidente pour avoir $X(k) \neq \varnothing$ est d'avoir $X(k_v) \neq \varnothing$ pour toute place v. Or ces conditions sur les différents k_v (dites *locales*) sont nettement plus faciles à vérifier via le lemme de Hensel (analogue p-adique de la méthode de Newton, cf. [**36**], chapitre II, théorème 1), en particulier quand la variété X est supposée lisse (pour une variété X définie par un système d'équations

polynomiales comme ci-dessus, la condition de lissité correspond au fait que la matrice jacobienne associée aux polynômes P_i est partout de rang maximal), hypothèse que nous ferons toujours dans la suite. Lorsque ces conditions locales sont suffisantes pour que $X(k) \neq \varnothing$, on dit que le *principe de Hasse* est vérifié. C'est par exemple le cas si la variété X est une quadrique projective, i.e., si elle est définie par une seule équation polynomiale homogène de degré 2 : c'est le célèbre théorème de Hasse-Minkowski (1924), cf. [**36**], chapitre IV, théorème 8. D'autres exemples dus à Hasse sont certaines équations normiques : soit k' une extension finie de k, notons $N_{k'/k} : k'^* \to k^*$ l'application norme. Considérons la variété affine X définie par

$$N_{k'/k}(x_1\omega_1 + \cdots + x_r\omega_r) = a \tag{3}$$

où $a \in k^*$ est une constante, les $x_1, \ldots, x_r$ sont les variables, et $(\omega_1, \ldots, \omega_r)$ est une base fixée de k' sur k. Alors le principe de Hasse vaut quand k' est une extension galoisienne de k de groupe de Galois *cyclique*. Notons que dans les deux situations précédentes, si on a $X(k) \neq \varnothing$, la propriété d'*approximation faible* vaut aussi, c'est-à-dire que $X(k)$ est dense dans le produit des $X(k_v)$ pour la topologie produit des topologies v-adiques.

Malheureusement, le principe de Hasse (de même que l'approximation faible) est souvent en défaut. Cela avait déjà été observé par Hasse pour certaines équations normiques lorsque l'extension k'/k n'est plus cyclique, mais biquadratique (ex. $k = \mathbf{Q}$, $k' = \mathbf{Q}(\sqrt{13}, \sqrt{17})$, $a = -1$). Des contre-exemples existent aussi pour les surfaces rationnelles telles que les surfaces cubiques dans $\mathbf{P}^3_k$ ([**40**]), ou encore les intersections de deux quadriques projectives ([**24**]).

Pour expliquer ces divers contre-exemples, Manin [**27**] a défini en 1970 une obstruction cohomologique au principe de Hasse, utilisant le *groupe de Brauer* $\operatorname{Br} X$ de la variété X ; une version similaire de cette obstruction pour l'approximation faible fut ensuite définie par Colliot-Thélène et Sansuc. Colliot-Thélène a conjecturé que cette obstruction, dite de *Brauer-Manin*, était la seule (aussi bien pour le principe de Hasse que pour l'approximation faible) pour les variétés projectives, lisses, qui sont géométriquement *rationnellement connexes* ; cette dernière condition signifie que pour tout corps algébriquement clos L contenant k, deux points quelconques de $X_L := X \times_k L$ peuvent être reliés par une courbe rationnelle tracée sur X_L (pour plus de détails, on pourra consulter [**42**]). Dans la suite, on abrégera « géométriquement rationnellement connexe » en « rationnellement connexe ». Toute variété lisse unirationnelle sur une clôture algébrique $\bar{k}$ de k (par exemple une hypersurface cubique de dimension au moins 2, ou encore un espace homogène d'un groupe algébrique linéaire connexe) est rationnellement connexe.

Si on ne fait pas cette hypothèse de connexité rationnelle, on connaît maintenant de nombreux exemples où l'obstruction de Brauer-Manin ne suffit pas à expliquer le