380

ASTÉRISQUE

2016

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2014/2015
EXPOSÉ N° 1098

Sébastien GOUËZEL

# *Spectre du flot géodésique en courbure négative*

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Astérisque est un périodique de la Société Mathématique de France.

Numéro 380



***Diffusion***

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
smf@smf.univ-mrs.fr

Hindustan Book Agency
O-131, The Shopping Mall
Arjun Marg, DLF Phase 1
Gurgaon 122002, Haryana
Inde

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

***Tarifs***

*Vente au numéro :* 75 € ($ 112)

*Abonnement* Europe : 650 €, hors Europe : 689 € ($ 1 033)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

***Secrétariat : Nathalie Christiaën***

Astérisque
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/



ISSN 0303-1179

ISBN 978-85629-836-7

Directeur de la publication : Marc PEIGNÉ

Séminaire BOURBAKI mars 2015
67e année, 2014-2015, n° 1098, p. 325 à 353

# SPECTRE DU FLOT GÉODÉSIQUE EN COURBURE NÉGATIVE
# [d'après F. Faure et M. Tsujii]

par **Sébastien GOUËZEL**

## INTRODUCTION

Quand on cherche à compter des objets, une technique souvent très efficace est de les combiner pour former une fonction d'une variable complexe appelée fonction zêta, dans l'espoir que ses propriétés analytiques révéleront des informations sur les objets initiaux. L'archétype de cette approche est fourni par la fonction zêta de Riemann, qui doit permettre de compter les nombres premiers. En notant $\mathscr{P}$ l'ensemble des nombres premiers, elle est donnée pour $\operatorname{Re} z > 1$ par la formule

$$\zeta_{\mathrm{Riemann}}(z) = \prod_{p\in\mathscr{P}} \frac{1}{1-p^{-z}} = \exp\left(\sum_{m\geq 1}\sum_{p\in\mathscr{P}} \frac{e^{-mz\log p}}{m}\right), \tag{1}$$

où la deuxième expression découle directement du développement en série du logarithme. La fonction $\zeta_{\mathrm{Riemann}}$ s'étend méromorphiquement à $\mathbb{C}$ avec un unique pôle en 1, et elle vérifie une équation fonctionnelle reliant $\zeta_{\mathrm{Riemann}}(z)$ et $\zeta_{\mathrm{Riemann}}(1-z)$. L'hypothèse de Riemann affirme que les zéros de $\zeta_{\mathrm{Riemann}}$ sont soit des entiers pairs strictement négatifs, soit de partie réelle $1/2$. Elle est équivalente au résultat de comptage suivant sur les nombres premiers : pour tout $\epsilon > 0$,

$$\operatorname{Card}\{\mathscr{P}\cap[1,x]\} = \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} + O(x^{1/2+\epsilon}). \tag{2}$$

En 1956, Selberg s'est intéressé aux géodésiques fermées (orientées) sur une surface compacte $M$ de courbure $-1$, i.e., un quotient compact du demi-plan de Poincaré $\mathbb{H}^2$. Pour les compter, il a introduit dans [**35**] une fonction zêta, définie pour $\operatorname{Re} z > 1$ par la formule

$$\zeta_{\mathrm{Selberg}}(z) = \prod_{\gamma\in\Gamma}\prod_{k=0}^{\infty}(1-e^{-(z+k)|\gamma|}) = \exp\left(-\sum_{m\geq 1}\sum_{\gamma\in\Gamma}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-m(z+k)|\gamma|}}{m}\right), \tag{3}$$

où on a noté $\Gamma$ l'ensemble des géodésiques fermées orientées primitives (i.e., on ne s'autorise pas à faire plusieurs fois le tour de la même géodésique) et $|\gamma|$ la longueur de la géodésique $\gamma$. Cette formule ressemble beaucoup (au signe près) à (1) si l'on fait correspondre $\log p$ et $|\gamma|$. Une différence (sur laquelle on reviendra) est le produit en $k$. En utilisant sa formule des traces (qui relie les géodésiques fermées au spectre du laplacien), Selberg a montré que $\zeta_{\text{Selberg}}$ admet une extension holomorphe à $\mathbb{C}$, qu'elle y vérifie une équation fonctionnelle reliant ses valeurs en $z$ et $1-z$, et enfin que ses zéros non triviaux sont de la forme $1/2 \pm \sqrt{1/4-\lambda_i}$ où les $\lambda_i$ sont les valeurs propres du laplacien (hyperbolique) sur $M$. Cet opérateur étant autoadjoint positif, ses valeurs propres sont réelles positives, ce qui implique que les zéros ont partie réelle $1/2$ en dehors d'un nombre fini d'exceptions dans $[0,1]$. Ainsi, un analogue de l'hypothèse de Riemann est vrai dans ce contexte. Huber en a ensuite déduit dans **[24]** un énoncé de comptage pour les géodésiques fermées analogue à (2).

La définition de la fonction zêta de Selberg s'étend à n'importe quelle variété riemannienne compacte. Plus généralement, étant donné un champ de vecteurs lisse $V$ sur une variété compacte $X$, on peut considérer le flot correspondant, qui intègre l'équation différentielle donnée par $V$. Formellement, il s'agit de la famille de difféomorphismes $(\phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ de $X$ définie uniquement par $\phi_0 = \mathrm{Id}$ et $\partial\phi_t(x)/\partial t = V(\phi_t(x))$. On peut alors considérer les orbites périodiques de ce flot, et définir une fonction zêta associée comme en (3) si le nombre d'orbites périodiques de longueur au plus $T$ croît au plus exponentiellement en $T$. Le cas des géodésiques fermées sur une variété riemannienne est un cas particulier de cette construction, donné par le flot géodésique sur le fibré unitaire tangent à la variété initiale. Dans ce contexte général, où on ne dispose pas de la formule des traces, le produit en $k$ dans (3) ne semble plus justifié. Ruelle a donc introduit dans **[31]** une fonction zêta qui est un analogue plus direct de la fonction zêta de Riemann, soit

$$\zeta_{\text{Ruelle}}(z) = \prod_{\gamma\in\Gamma} \frac{1}{1-e^{-z|\gamma|}} = \exp\left(\sum_{m\geq 1}\sum_{\gamma\in\Gamma} \frac{e^{-mz|\gamma|}}{m}\right) = \zeta_{\text{Selberg}}(z+1)/\,\zeta_{\text{Selberg}}(z).$$

Il n'est cependant pas clair que ces définitions aient encore un intérêt en dehors de la courbure constante, où leur pertinence est reliée à la structure algébrique sous-jacente. Smale, dans l'article fondateur **[36]** qui introduit ces objets dans un cadre général, écrit d'ailleurs (en parlant du cas des flots d'Anosov, décrit plus bas) : « Does $\zeta_{\text{Selberg}}$ have a meromorphic continuation to all of $\mathbb{C}$? An affirmative answer would be roughly necessary and sufficient condition for $\zeta_{\text{Selberg}}$ to be useful. I must admit a positive answer would be a little shocking! »

On décrit dans ce texte les progrès récents à ce sujet, pour les flots d'Anosov (les flots les plus instables, dont l'exemple classique est le flot géodésique sur une variété compacte de courbure strictement négative). Ils apportent une réponse positive à