380

ASTÉRISQUE

2016

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2014/2015
EXPOSÉ N° 1090

Aurélien DJAMENT

La propriété noethérienne pour les foncteurs entre espaces vectoriels

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Astérisque est un périodique de la Société Mathématique de France.

Numéro 380

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
smf@smf.univ-mrs.fr

Hindustan Book Agency
O-131, The Shopping Mall
Arjun Marg, DLF Phase 1
Gurgaon 122002, Haryana
Inde

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 75 € ($ 112)

Abonnement Europe : 650 €, hors Europe : 689 € ($ 1 033)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Astérisque
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN 0303-1179

ISBN 978-85629-836-7

Directeur de la publication : Marc PEIGNÉ

Séminaire BOURBAKI Novembre 2014
67e année, 2014-2015, no 1090, p. 35 à 60

LA PROPRIÉTÉ NOETHÉRIENNE POUR LES FONCTEURS ENTRE ESPACES VECTORIELS [d'après A. Putman, S. Sam et A. Snowden]

par **Aurélien DJAMENT**

INTRODUCTION

L'un des outils les plus fondamentaux pour montrer qu'un anneau est noethérien est le théorème de la base de Hilbert. Frappant par sa généralité et la simplicité de sa démonstration (alors que les propriétés de finitude des anneaux et modules conduisent très rapidement à des questions difficiles — voir par exemple l'ouvrage [**27**]), on peut l'établir à l'aide d'un bon ordre approprié sur la base des monômes, qui donne lieu à la notion de base de Gröbner. Cela permet, de fait, de ramener la propriété noethérienne dans le cadre *linéaire* qui est celui du théorème de Hilbert à une propriété noethérienne *combinatoire* (portant sur un ensemble ordonné), qui est immédiate dans ce cadre. L'idée essentielle du travail de S. Sam et A. Snowden [**47**], ainsi que de celui, relié, d'A. Putman et Sam [**44**], que nous allons esquisser ici consiste en une vaste généralisation de ces méthodes, conduisant à des résultats de finitude spectaculaires dans des catégories de foncteurs.

Revenons au théorème de la base de Hilbert. Comme un anneau A est noethérien à gauche si et seulement si la catégorie $\mathscr{A} := A - \mathbf{Mod}$ des A-modules à gauche est localement noethérienne [(1)], et que la catégorie $A[x] - \mathbf{Mod}$ s'identifie à la catégorie des A-modules à gauche munis d'un endomorphisme, que nous noterons $\mathscr{A}_{\mathbb{N}}$ (car un endomorphisme est la même chose qu'une action du monoïde additif $\mathbb{N}$ des entiers naturels), une reformulation de ce théorème est la suivante :

Théorème 0.1 (Théorème de la base de Hilbert). — *Si la catégorie abélienne $\mathscr{A}$ est localement noethérienne, alors la catégorie abélienne $\mathscr{A}_{\mathbb{N}}$ est localement noethérienne.*

(1) Toutes les notions de finitude utilisées dans cet exposé seront rappelées en détail au paragraphe 2.1.

Le résultat est en fait valable sous cette forme si $\mathcal{A}$ est une catégorie abélienne quelconque et se démontre de la même façon.

Si l'on note $\underline{\mathbb{N}}$ la catégorie à un objet associée au monoïde $\mathbb{N}$, la catégorie $\mathcal{A}_{\mathbb{N}}$ est isomorphe à la catégorie $\mathbf{Fct}(\underline{\mathbb{N}}, \mathcal{A})$ des foncteurs de source $\underline{\mathbb{N}}$ et de but $\mathcal{A}$. En général, si $\mathcal{A}$ est une catégorie abélienne et $\mathcal{C}$ est une petite catégorie quelconque, la catégorie $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ est une catégorie abélienne (assez régulière si $\mathcal{A}$ l'est) ; on est conduit à poser la question suivante :

Question fondamentale pour une petite catégorie $\mathcal{C}$

Est-il vrai que, pour toute catégorie abélienne localement noethérienne (assez régulière) $\mathcal{A}$, la catégorie de foncteurs $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ est localement noethérienne ?

Les catégories finies (ayant un nombre fini d'objets et de morphismes) constituent un exemple évident de telles catégories. Le théorème de la base de Hilbert donne un autre exemple ; la réponse à la question est négative pour la plupart des petites catégories. Déjà, si l'on se restreint aux catégories à un objet associées à un groupe, on se heurte à la question très difficile de caractériser les groupes dont l'algèbre (sur un corps, sur l'anneau des entiers...) est un anneau noethérien. Mais même en se limitant, comme il est classique de le faire, aux petites catégories $\mathcal{C}$ telles que l'ensemble $\mathcal{C}(a, b)$ des morphismes de source a et de but b soit fini pour tous objets a et b, la question demeure fort ardue et largement ouverte.

La théorie de Sam et Snowden fournit un critère général sur une petite catégorie, vérifiable dans de nombreux exemples intéressants, pour que la réponse à la question fondamentale soit positive (ce sont les catégories que ces auteurs nomment *quasi-Gröbner*).

L'une des applications les plus importantes de leur travail est le théorème suivant, dont la première assertion avait été conjecturée par J. Lannes et L. Schwartz à la fin des années 1980 (voir le paragraphe 1.1 ci-après pour un historique du problème).

THÉORÈME 0.2 (Putman-Sam, Sam-Snowden). — *Soit k un corps fini. La catégorie $\mathcal{F}(k)$ des foncteurs des k-espaces vectoriels de dimension finie vers les k-espaces vectoriels est localement noethérienne.*

Plus généralement, soient A un anneau fini, $\mathbf{P}(A)$ la catégorie des A-modules libres de rang fini et $\mathcal{A}$ une catégorie de Grothendieck localement noethérienne. Alors la catégorie $\mathbf{Fct}(\mathbf{P}(A), \mathcal{A})$ est localement noethérienne.

Dans le travail [**44**], Putman et Sam démontrent ce résultat, pour A commutatif, en le déduisant du suivant, plus fort, qu'on ne semble pas pouvoir établir en utilisant le critère de [**47**] (même si la méthode est analogue) :