380

ASTÉRISQUE

2016

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2014/2015
EXPOSÉ N° 1099

Sophie GRIVAUX & Maria ROGINSKAYA

Espaces de Banach possédant très peu d'opérateurs

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Astérisque est un périodique de la Société Mathématique de France.

Numéro 380

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
smf@smf.univ-mrs.fr

Hindustan Book Agency
O-131, The Shopping Mall
Arjun Marg, DLF Phase 1
Gurgaon 122002, Haryana
Inde

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 75 € ($ 112)

Abonnement Europe : 650 €, hors Europe : 689 € ($ 1 033)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Astérisque
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN 0303-1179

ISBN 978-85629-836-7

Directeur de la publication : Marc PEIGNÉ

Séminaire BOURBAKI Mars 2015
67e année, 2014-2015, n° 1099, p. 355 à 397

ESPACES DE BANACH POSSÉDANT TRÈS PEU D'OPÉRATEURS [d'après S. Argyros et R. Haydon]

par **Sophie GRIVAUX & Maria ROGINSKAYA**

La plus grande faiblesse de la pensée contemporaine me paraît résider dans la surestimation extravagante du connu par rapport à ce qui reste à connaître.

André Breton, 1937

1. INTRODUCTION

1.1. Présentation du problème et résultat principal

Si X et Y sont deux espaces de Banach (réels ou complexes), la seule méthode générale dont on dispose pour construire des opérateurs linéaires bornés de X dans Y est le théorème de Hahn-Banach. Celui-ci permet de construire des formes linéaires continues sur X, et donc des opérateurs de rang 1

$$x^* \otimes y \,:\, x \mapsto \langle x^*, x\rangle\, y, \quad x^* \in X^*,\ y \in Y$$

de X dans Y. Pour tous $x^* \in X^*$ et $y \in Y$, $||x^* \otimes y|| = ||x^*||.||y||$. On peut également construire des opérateurs de rang fini

$$\sum_{i=1}^{r} x_i^* \otimes y_i \,:\, x \mapsto \sum_{i=1}^{r} \langle x_i^*, x\rangle\, y_i, \quad x_i^* \in X^*,\ y_i \in Y,\ 1 \le i \le r,\ r \ge 1$$

et, en passant à la limite, des opérateurs de la forme

$$\sum_{i\ge 1} x_i^* \otimes y_i \,:\, x \mapsto \sum_{i\ge 1} \langle x_i^*, x\rangle\, y_i, \quad x_i^* \in X^*,\ y_i \in Y,\ \text{où}\ \sum_{i\ge 1} ||x_i^*||\,.\,||y_i|| < +\infty.$$

De tels opérateurs ont été appelés par Grothendieck *opérateurs nucléaires* **[16, 15]**. Ils sont évidemment compacts, comme limites en norme d'opérateurs de rang fini. Les seuls opérateurs de X dans Y que l'on puisse construire en général sont donc des opérateurs compacts. Il est alors naturel de se demander quels couples d'espaces (X, Y)

ont la propriété que tout opérateur de X dans Y est nécessairement compact. Le théorème classique de Pitt affirme que les couples (ℓ^p, ℓ^r), $p > r$, ont cette propriété. Si on se restreint au cas où $Y = X$, où X est de dimension infinie, il existe évidemment des opérateurs non compacts sur X, qui sont les multiples de l'opérateur identité (nous appellerons par la suite ceux-ci *opérateurs scalaires*). De manière générale, les seuls opérateurs sur X que l'on puisse construire sans aucune information sur la structure de X sont donc somme d'un opérateur scalaire et d'un opérateur compact. D'où la question suivante, mentionnée par exemple par Lindenstrauss dans [**19**] :

Question 1.1. — *Existe-t-il un espace de Banach de dimension infinie sur lequel tout opérateur est somme d'un opérateur scalaire et d'un opérateur compact ?*

Nous avons observé plus haut que les opérateurs compacts obtenus en toute généralité à partir du théorème de Hahn-Banach étaient en fait nucléaires. Une version plus naturelle de la Question 1.1 est donc la suivante :

Question 1.2. — *Existe-t-il un espace de Banach de dimension infinie sur lequel tout opérateur est somme d'un opérateur scalaire et d'un opérateur nucléaire ?*

La question de l'existence de couples (X, Y) d'espaces de Banach de dimension infinie tels que tout opérateur (ou tout opérateur compact) de X dans Y est nucléaire remonte à Grothendieck [**16, 15**], et est très délicate. Pour de très larges classes de couples (X, Y), il est possible de prouver l'existence d'opérateurs compacts de X dans Y qui ne sont pas nucléaires, mais il existe cependant des couples (X, Y) tels que tout opérateur compact de X dans Y est nucléaire. Cela repose sur la construction de Pisier [**23, 24**] d'un espace séparable P de dimension infinie, de cotype 2 ainsi que son dual, tel que les produits tensoriels injectifs et projectifs $P \check{\otimes} P$ et $P \hat{\otimes} P$ coïncident. Tout opérateur de P dans lui-même, ou de P dans P^*, qui est limite en norme d'opérateurs de rang fini est nucléaire et tout opérateur borné de P dans P^* est intégral. L'espace P n'ayant pas la propriété d'approximation, il n'est pas possible de déduire directement de ceci que tout opérateur compact de P dans lui-même, ou de P dans P^*, est nucléaire. Cependant, John a prouvé dans [**17**] que tout opérateur compact de P dans P^* est nucléaire.

La question de l'existence de couples (X, Y) tels que tout opérateur de X dans Y est nucléaire est toujours ouverte, ainsi que la Question 1.2. La Question 1.1 a par contre été résolue récemment par Spiros Argyros et Richard Haydon, dans l'article [**3**] publié en 2012. C'est le but de cet exposé que de présenter ce travail remarquable, en prouvant le théorème suivant :