380

ASTÉRISQUE

2016

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2014/2015
EXPOSÉ N° 1102

Sophie MOREL

Construction de représentations galoisiennes de torsion

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Astérisque est un périodique de la Société Mathématique de France.

Numéro 380

Diffusion

Maison de la SMF	Hindustan Book Agency	AMS
Case 916 - Luminy	O-131, The Shopping Mall	P.O. Box 6248
13288 Marseille Cedex 9	Arjun Marg, DLF Phase 1	Providence RI 02940
France	Gurgaon 122002, Haryana	USA
smf@smf.univ-mrs.fr	Inde	www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 75 € ($ 112)

Abonnement Europe : 650 €, hors Europe : 689 € ($ 1 033)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Astérisque
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN 0303-1179

ISBN 978-85629-836-7

Directeur de la publication : Marc PEIGNÉ

Séminaire BOURBAKI juin 2015
67e année, 2014-2015, n° 1102, p. 449 à 473

CONSTRUCTION DE REPRÉSENTATIONS GALOISIENNES DE TORSION [d'après Peter Scholze]

par **Sophie MOREL**

INTRODUCTION

Le but de cet exposé est de présenter les résultats de Scholze sur la construction des représentations galoisiennes de torsion associées aux caractères de l'algèbre de Hecke apparaissant dans la cohomologie de torsion des espaces localement symétriques associés au groupe $\mathbf{GL}_n$. La phrase précédente est expliquée plus en détail dans la section 1. Toutes les erreurs et inexactitudes dans ce texte sont bien entendu dues à l'auteur et non à Scholze.

Je remercie Ana Caraiani pour d'utiles remarques sur une version précédente de cet exposé.

1. QUELQUES CONJECTURES DU PROGRAMME DE LANGLANDS

1.1. Représentations automorphes

La référence standard pour la définition des formes et représentations automorphes est le texte de Borel et Jacquet dans Corvallis ([**8**]), voir aussi le livre de Moeglin et Waldspurger ([**26**]).

Soit n un entier strictement positif. On note $\mathbb{A} = \mathbb{R} \times \mathbb{A}_f$ l'anneau des adèles de $\mathbb{Q}$, où

$$\mathbb{A}_f = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \widehat{\mathbb{Z}} = \{(x_p) \in \prod_{p \text{ premier}} \mathbb{Q}_p \mid x_p \text{ est dans } \mathbb{Z}_p \text{ pour presque tout } p\}$$

est l'anneau des adèles finies (où « pour presque tout p » signifie « pour tout p sauf un nombre fini »). On fixe une mesure de Haar sur le groupe topologique

$$\mathbf{GL}_n(\mathbb{A}) = \{(g_\infty, (g_p)) \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}) \times \prod_p \mathbf{GL}_n(\mathbb{Q}_p) | g_p \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{Z}_p) \text{ pour presque tout } p\},$$

et on note $L^2_{\mathbf{GL}_n} = L^2(\mathbf{GL}_n(\mathbb{Q})\mathrm{A} \setminus \mathbf{GL}_n(\mathbb{A}), \mathbb{C})$, où $\mathbf{GL}_n(\mathbb{Q})$ est plongé diagonalement dans $\mathbf{GL}_n(\mathbb{A})$ et $\mathrm{A} = \mathbb{R}_{>0}$ est la composante connexe de 1 dans le centre de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$.[(1)]

Le groupe $\mathbf{GL}_n(\mathbb{A})$ agit sur $L^2_{\mathbf{GL}_n}$ par translation à droite sur l'argument de la fonction. Une *représentation automorphe discrète de* $\mathbf{GL}_n(\mathbb{A})$ est une représentation irréductible de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{A})$ qui apparaît comme facteur direct de la représentation $L^2_{\mathbf{GL}_n}$. En fait, on a

$$L^2_{\mathbf{GL}_n} = L^2_{\mathbf{GL}_n,\mathrm{disc}} \oplus L^2_{\mathbf{GL}_n,\mathrm{cont}}$$

en tant que représentation de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{A})$, où $L^2_{\mathbf{GL}_n,\mathrm{cont}}$ n'a pas de facteur direct irréductible et

$$L^2_{\mathbf{GL}_n,\mathrm{disc}} = \bigoplus \pi^{m(\pi)}$$

(somme directe complétée), où la somme est sur les représentations automorphes discrètes et les $m(\pi)$ sont des entiers strictement positifs.

Soit $f \in L^2_{\mathbf{GL}_n}$ une fonction bornée. On dit que f est *cuspidale* si, pour tout sous-groupe parabolique propre $\mathbf{P}$ de $\mathbf{GL}_n$, si on note $\mathbf{N}_P$ le radical unipotent de $\mathbf{P}$ et dn une mesure de Haar sur $\mathbf{N}_P(\mathbb{A})$, alors, pour tout $g \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{A})$,

$$\int_{\mathbf{N}_P(\mathbb{Q})\setminus\mathbf{N}_P(\mathbb{A})} f(ng)dn = 0.$$

L'espace $L^2_{\mathbf{GL}_n,\mathrm{cusp}}$ des fonctions bornées cuspidales est un sous-espace de $L^2_{\mathbf{GL}_n}$ fermé et stable par l'action de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{A})$, qui est contenu dans $L^2_{\mathbf{GL}_n,\mathrm{disc}}$, c'est-à-dire somme directe complétée de représentations irréductibles de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{A})$. Les représentations irréductibles de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{A})$ qui apparaissent dans $L^2_{\mathbf{GL}_n,\mathrm{cusp}}$ sont dites *automorphes cuspidales.*

De plus, si π est une représentation automorphe discrète de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{A})$, on a

$$\pi = \pi_\infty \otimes \bigotimes_{p \text{ premier}}{}' \pi_p,$$

où π_∞ (resp. π_p) est une représentation irréductible de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathbf{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$) et, pour presque tout p, la représentation π_p est *non ramifiée*, c'est-à-dire que $\pi_p^{\mathbf{GL}_n(\mathbb{Z}_p)} \neq 0$ (cet espace est alors de dimension 1). Voir l'article de Flath **[16]** pour la définition du produit tensoriel restreint $\bigotimes'$ et pour des références. La classification de Langlands associe à la représentation irréductible admissible π_∞ de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ une représentation

(1) On pourrait fixer un caractère unitaire quelconque ξ de A et considérer l'espace des fonctions $f : \mathbf{GL}_n(\mathbb{Q}) \setminus \mathbf{GL}_n(\mathbb{A}) \longrightarrow \mathbb{C}$ telles que $f(zg) = \xi(z)f(g)$ pour tous $z \in \mathrm{A}$ et $g \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{A})$ et qui sont L^2 modulo A. Dans cet exposé, on prendra $\xi = 1$, mais c'est uniquement pour alléger les notations.