380

ASTÉRISQUE

2016

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2014/2015
EXPOSÉ N° 1103

Jean-Marc SCHLENKER

Variétés lorentziennes plates vues comme limites de variétés anti-de Sitter

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Astérisque est un périodique de la Société Mathématique de France.

Numéro 380

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
smf@smf.univ-mrs.fr

Hindustan Book Agency
O-131, The Shopping Mall
Arjun Marg, DLF Phase 1
Gurgaon 122002, Haryana
Inde

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 75 € ($ 112)

Abonnement Europe : 650 €, hors Europe : 689 € ($ 1 033)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Astérisque
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN 0303-1179

ISBN 978-85629-836-7

Directeur de la publication : Marc PEIGNÉ

Séminaire BOURBAKI juin 2015
67e année, 2014-2015, n° 1103, p. 475 à 497

VARIÉTÉS LORENTZIENNES PLATES VUES COMME LIMITES DE VARIÉTÉS ANTI-DE SITTER [d'après Danciger, Guéritaud et Kassel]

par **Jean-Marc SCHLENKER**

INTRODUCTION

Les travaux de Danciger, Guéritaud et Kassel [**12, 13**] développent de manière féconde les liens entre trois directions de recherche :

- les variétés lorentziennes plates complètes de dimension 3, en relation avec la conjecture de Margulis qui les concerne,
- les variétés anti-de Sitter complètes de dimension 3,
- les applications contractantes entre surfaces hyperboliques, ou plus généralement les applications contractantes équivariantes du plan hyperbolique dans lui-même, et leurs versions infinitésimales, les champs de vecteurs contractants sur les surfaces hyperboliques.

Nous allons présenter rapidement quelques résultats obtenus par Danciger, Guéritaud et Kassel dans ces différents domaines, en commençant par les énoncés sur les surfaces avant de passer à la dimension 3. Nous verrons alors comment les résultats concernant les surfaces ont des interprétations naturelles en termes de variété de dimension 3.

Il n'est pas question ici de donner une présentation exhaustive des preuves, d'autant que les références [**12, 13**] sont remarquablement bien écrites. On va tenter de présenter de manière assez synthétique les principaux résultats, et de mettre en évidence l'articulation entre eux, ainsi que leur contexte. On se concentrera en particulier sur

- la notion de *géométrie transitionnelle*, qui offre un pont entre les géométries hyperbolique, Minkowski et anti-de Sitter, que les auteurs utilisent pour donner des preuves simples de résultats importants sur les variétés lorentziennes plates à partir de résultats correspondants en géométrie anti-de Sitter, dans le § 4,

– la relation entre feuilletages par des géodésiques de type temps et difféomorphismes contractants (resp. champs de vecteurs contractants), dans le § 5,
– la relation entre déformations en bandelettes (resp. déformations infinitésimales en bandelettes) de surfaces hyperboliques et domaines fondamentaux bordés par des plans croches, dans le § 6.

Notations. — On notera S une surface, homéomorphe à l'intérieur d'une surface compacte à bord, munie d'une métrique hyperbolique convexe co-compacte (c'est-à-dire dont tous les bouts sont d'aire infinie). On appellera $\mathcal{T}_S$ l'espace de Teichmüller de S, vu comme espace des métriques hyperboliques convexes co-compactes sur S considérées à isotopie près.

1. LE COMPLEXE DES ARCS ET LES DÉFORMATIONS PAR BANDELETTES

On s'intéresse ici à l'espace des métriques hyperboliques complètes sur une surface S homéomorphe à l'intérieur d'une surface compacte orientée à bord. Plus spécifiquement, on peut se poser la question suivante : comment peut-on passer de manière « géométrique » d'une métrique hyperbolique h fixée à une autre métrique hyperbolique h' ?

Si on se place du point de vue des structures complexes (ou conformes) sur S, une réponse est donnée par la théorie « de Teichmüller » des applications quasi-conformes optimales entre surfaces de Riemann.

Du point de vue des surfaces hyperboliques, lorsque S est fermée (compacte sans bord) une autre réponse possible est donnée par les coordonnées de Fenchel-Nielsen (voir par exemple [**17**]) qui ont l'inconvénient de dépendre du choix d'une décomposition en pantalons. Si on veut éviter un tel choix, on peut utiliser le théorème de tremblement de terre de Thurston (démontré dans [**24**]) qui affirme qu'il existe un unique tremblement de terre qui relie h à h' — les tremblements de terre sont des extensions aux laminations mesurées des twists de Dehn fractionnels le long de multicourbes pondérées. Il est d'ailleurs intéressant de constater que la preuve la plus simple du théorème de tremblement de terre de Thurston, obtenue par Mess [**29, 2**], utilisait déjà la géométrie anti-de Sitter.

Une autre alternative possible, pour les surfaces fermées, est fournie par l'application de grafting, qui associe à une métrique hyperbolique h et à une lamination mesurée l une autre métrique hyperbolique $gr(m, l) \in \mathcal{T}$ sur S. Lorsque l est une courbe fermée c munie d'un poids $w > 0$, la structure conforme sous-jacente à $gr(m, l)$ est obtenue en coupant m le long de c et en y introduisant une bande plate de largeur w.