380

ASTÉRISQUE

2016

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2014/2015
EXPOSÉ N° 1092

Jean-François QUINT

Rigidité des $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$*-orbites dans les espaces de modules de surfaces plates*

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Astérisque est un périodique de la Société Mathématique de France.

Numéro 380

Diffusion

Maison de la SMF	Hindustan Book Agency	AMS
Case 916 - Luminy	O-131, The Shopping Mall	P.O. Box 6248
13288 Marseille Cedex 9	Arjun Marg, DLF Phase 1	Providence RI 02940
France	Gurgaon 122002, Haryana	USA
`smf@smf.univ-mrs.fr`	Inde	`www.ams.org`

Tarifs

Vente au numéro : 75 € ($ 112)

Abonnement Europe : 650 €, hors Europe : 689 € ($ 1 033)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Astérisque

Société Mathématique de France

Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie

75231 Paris Cedex 05, France

Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96

`revues@smf.ens.fr` • `http://smf.emath.fr/`

ISSN 0303-1179

ISBN 978-85629-836-7

Directeur de la publication : Marc PEIGNÉ

Séminaire BOURBAKI Novembre 2014
67e année, 2014-2015, no 1092, p. 83 à 138

RIGIDITÉ DES $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$-ORBITES DANS LES ESPACES DE MODULES DE SURFACES PLATES [d'après Eskin, Mirzakhani et Mohammadi]

par **Jean-François QUINT**

INTRODUCTION

Soient g un entier ≥ 1 et $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ une partition de l'entier $2g - 2$. À cette donnée combinatoire, on associe une strate de différentielles abéliennes $\mathscr{H}(\alpha)$. Les éléments de $\mathscr{H}(\alpha)$ sont les classes d'isomorphismes de paires (M, ω) où M est une surface de Riemann de genre g et ω est une 1-forme différentielle holomorphe sur M admettant exactement n zéros de multiplicités $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. L'espace $\mathscr{H}(\alpha)$ est naturellement muni d'une structure analytique complexe affine plate et d'une action du groupe $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ des matrices carrées réelles de taille 2 et de déterminant > 0. Dans une série de travaux récents, Eskin et Mirzakhani [**11**] et Eskin, Mirzakhani et Mohammadi [**12**] ont montré que les adhérences des $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$-orbites dans $\mathscr{H}(\alpha)$ étaient des sous-variétés affines complexes, répondant ainsi affirmativement à une conjecture de McMullen.

Dans cet exposé, après avoir décrit plus précisément la structure de l'espace $\mathscr{H}(\alpha)$, je donnerai des indications sur la démonstration de ce théorème. Je me concentrerai essentiellement sur le résultat principal de [**11**], qui fait appel à des notions de théorie ergodique.

J'ai sollicité l'aide de nombreux collègues au cours de la préparation de cet exposé. Je tiens à remercier Christophe Bavard, Sylvain Crovisier, Vincent Koziarz, Carlos Matheus et Alex Wright. Je remercie tout particulièrement Duc-Manh N'Guyen, qui a répondu avec patience à mes questions de débutant sur les surfaces de translation, Yves Benoist, avec qui nous avons beaucoup discuté de ces sujets, et Alex Eskin qui a bien voulu m'expliquer des points particulièrement délicats des démonstrations. Je remercie enfin Viviane Le Dret qui a considérablement amélioré la présentation de ce texte en y supprimant de nombreuses coquilles.

1. STRATES DE DIFFÉRENTIELLES ABÉLIENNES

Dans tout cet exposé, on fixe un entier $g \geq 1$ et une surface topologique S compacte, orientable et de genre g. Nous allons définir les structures de translation à singularités coniques sur S et des espaces de modules de telles structures. Ces espaces seront munis d'une action du groupe $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$.

1.1. Structures plates et formes holomorphes

Une carte plate à singularité conique de S est un triplet (U, φ, ψ) où U est un ouvert de S, φ est un homéomorphisme de U vers un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant 0 et $\psi : U \to \mathbb{C}$ est l'application $x \mapsto \varphi(x)^{\alpha+1}$, où α est un entier ≥ 0, uniquement déterminé par φ et ψ.

Deux cartes plates à singularité conique (U_1, φ_1, ψ_1) et (U_2, φ_2, ψ_2) sont dites compatibles par translation s'il existe c dans $\mathbb{C}$ tel que, pour tout x dans $U_1 \cap U_2$, on ait $\psi_2(x) = \psi_1(x) + c$. En particulier, dans ce cas, le changement de carte

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_1 \cap U_2)$$

est une application holomorphe.

Un atlas de translation à singularités coniques sur S est un ensemble $\mathscr{A}$ de cartes plates à singularité conique, compatibles par translation entre elles, qui est maximal pour l'inclusion et tel que $\bigcup_{(U,\varphi,\psi)\in\mathscr{A}} U = S$. Un tel atlas étant donné, on dit que la paire $(S, \mathscr{A})$ est une surface de translation à singularités coniques. Une singularité de $(S, \mathscr{A})$ est un élément x de S tel qu'il existe une carte (U, φ, ψ) de $\mathscr{A}$ avec $x \in U$, $\varphi(x) = 0$ et $\alpha \geq 1$ où α est l'entier tel que $\psi = \varphi^{\alpha+1}$. On dit que α est l'ordre de la singularité x. L'ensemble des singularités de $(S, \mathscr{A})$ est fini.

Comme les changements de carte de $\mathscr{A}$ sont holomorphes, la structure de translation induit sur S une structure de surface de Riemann. De plus, S est munie de la 1-forme holomorphe ω telle que, sur une carte (U, φ, ψ) de $\mathscr{A}$, on ait $\omega = \mathrm{d}\psi$. D'après le théorème de Riemann-Roch, si ω a n zéros, de multiplicités $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, on a $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 2g - 2$. En d'autres termes, si $x_1, \ldots, x_n$ sont les singularités de $(S, \mathscr{A})$ et si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont les ordres de $x_1, \ldots, x_n$, on a $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 2g - 2$.

Réciproquement, la donnée d'une structure de surface de Riemann sur S et d'une 1-forme holomorphe non nulle relativement à celle-ci détermine uniquement une structure de surface de translation à singularités coniques sur S.

Remarque 1.1. — Il est sans doute plus simple de définir une structure de surface de translation comme la donnée d'une structure de surface de Riemann et d'une 1-forme holomorphe non nulle. Le lourd formalisme des atlas de translation que nous venons d'introduire prendra son sens plus loin lorsque nous définirons une action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ sur l'ensemble de toutes les surfaces plates.