381

ASTÉRISQUE

2016

ON THE DERIVED CATEGORY OF 1-MOTIVES

Luca BARBIERI-VIALE and Bruno KAHN

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Astérisque est un périodique de la Société Mathématique de France.

Numéro 381, 2016

Comité de rédaction

Ahmed ABBES
Viviane BALADI
Gérard BESSON
Laurent BERGER
Philippe BIANE
Hélène ESNAULT
Damien GABORIAU
Michael HARRIS
Fabrice PLANCHON
Pierre SCHAPIRA
Bertrand TOËN
Éric VASSEROT (dir.)

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
smf@smf.univ-mrs.fr

Hindustan Book Agency
O-131, The Shopping Mall
Arjun Marg, DLF Phase 1
Gurgaon 122002, Haryana
Inde

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro: 50 € ($ 75)
Abonnement Europe: 530 €, hors Europe: 569 € ($ 853)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Astérisque
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél: (33) 01 44 27 67 99 • Fax: (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/

© *Société Mathématique de France 2016*

Tous droits réservés (article L 122–4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefa∘con sanctionnée par les articles L 335–2 et suivants du CPI.

ISSN 0303-1179
ISBN 978-2-85629-837-4

Directeur de la publication: Marc Peigné

381

ASTÉRISQUE

2016

ON THE DERIVED CATEGORY OF 1-MOTIVES

Luca BARBIERI-VIALE and Bruno KAHN

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Luca Barbieri-Viale
Dipartimento di Matematica "F. Enriques", Università degli Studi di Milano, Via C. Saldini, 50, I-20133 Milano, Italy
luca.barbieri-viale@unimi.it

Bruno Kahn
IMJ-PRG, Case 247, 4 place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France
bruno.kahn@imj-prg.fr

***Classification mathématique par sujet* (2000).** — 19E15, 14C15; 14F20, 14C30, 18E30.

Mots-clefs. — 1-motifs, motifs triangulés, théorème de Roĭtman, conjecture de Deligne.

ON THE DERIVED CATEGORY OF 1-MOTIVES

by Luca BARBIERI-VIALE and Bruno KAHN

Abstract. — We embed the derived category of Deligne 1-motives over a perfect field into the étale version of Voevodsky's triangulated category of geometric motives, after inverting the exponential characteristic. We then show that this full embedding "almost" has a left adjoint LAlb. Applying LAlb to the motive of a variety we get a bounded complex of 1-motives, that we compute fully for smooth varieties and partly for singular varieties. Among applications, we give motivic proofs of Roĭtman type theorems and new cases of Deligne's conjectures on 1-motives.

***Résumé* (Sur la catégorie dérivée des 1-motifs.)** — Nous plongeons la catégorie dérivée des 1-motifs de Deligne sur un corps parfait dans la version étale de la catégorie triangulée des motifs géométriques de Voevodsky, après avoir inversé l'exposant caractéristique. Nous montrons ensuite que ce plongement a « presque » un adjoint à gauche LAlb. En appliquant LAlb au motif d'une variété, on obtient un complexe de 1-motifs, que nous calculons entièrement dans le cas des variétés lisses et partiellement dans le cas des variétés singulières. Parmi les applications, nous donnons des preuves motiviques de théorèmes de type Roĭtman, et établissons de nouveaux cas des conjectures de Deligne sur les 1-motifs.

© Astérisque 381, SMF 2016

CONTENTS

Introduction 1
General assumptions and notations 3

Outline 5
0.1. The derived category of 1-motives, integrally 5
0.2. $\mathbb{Z}[1/p]$-integral equivalence 5
0.3. Duality 5
0.4. Left adjoint 6
0.5. Smooth schemes 6
0.6. LAlb and RPic 7
0.7. Singular schemes 7
0.8. Curves 7
0.9. Roĭtman's theorem 8
0.10. The homotopy t-structure and 1-motivic sheaves 8
0.11. Internal Hom and tensor structure 8
0.12. A conceptual proof of Deligne's conjectures 9
0.13. Hodge structures 9
0.14. Mixed realizations 10
0.15. ℓ-adic 10
0.16. Going further 10
0.17. Caveat 10
A small reading guide 11

Part I. The universal realization functor 13

1. The derived category of 1-motives 15
1.1. Commutative group schemes 15
1.2. Deligne 1-motives 17
1.3. Weights and cohomological dimension 19
1.4. Group schemes and sheaves with transfers 20
1.5. Representable sheaves and exactness 22
1.6. Local Exts and global Exts 24
1.7. Homotopy invariance and strict homotopy invariance 25
1.8. Étale motivic complexes 27

1.9. 1-motives with torsion and an exact structure on $\mathscr{M}_1[1/p]$ 29
1.10. The derived category of 1-motives 31
1.11. Torsion objects in the derived category of 1-motives 31
1.12. Discrete sheaves and permutation modules 33
1.13. Cartier duality and 1-motives with cotorsion 34
1.14. How not to invert p 37

2. Universal realization 39
2.1. Statement of the theorem 39
2.2. Construction of T 40
2.3. Full faithfulness of T 40
2.4. Gersten's principle 41
2.5. An important computation 41
2.6. Essential image 43
2.7. The universal realization functor 44

3. 1-motivic sheaves and the homotopy t-structure 45
3.1. Some useful lemmas 45
3.2. Breen's method 47
3.3. 1-motivic sheaves 48
3.4. Extensions of 1-motivic sheaves 52
3.5. A basic example 54
3.6. Application: the Néron-Severi group of a smooth scheme 55
3.7. Technical results on 1-motivic sheaves 56
3.8. Presenting 1-motivic sheaves by group schemes 57
3.9. The transfer structure on 1-motivic sheaves 59
3.10. 1-motivic sheaves and DM 61
3.11. Comparing t-structures 62
3.12. Global Ext^i with transfers 63
3.13. Local Ext^i with transfers 64
3.14. Ext^n with and without transfers 66
3.15. t-exactness 68

4. Comparing two dualities 71
4.1. Biextensions of 1-motives 71
4.2. Biextensions of complexes of 1-motives 76
4.3. A pairing with finite coefficients 77
4.4. Comparing two Ext groups 78
4.5. Two Cartier dualities 79

Part II. The functors LAlb and RPic 81

5. Definition of LAlb and RPic 83
5.1. Motivic Cartier duality 83

5.2. Motivic Albanese 84
5.3. Motivic Pic 86
5.4. Motivic π_0 86
5.5. LAlb and Chow motives 87

6. The adjunction $\mathrm{LAlb} - \mathrm{Tot}$ with rational coefficients 89
6.1. Rational coefficients revisited 89
6.2. The functor $\mathrm{LAlb}^{\mathbb{Q}}$ 91

7. A tensor structure on $D^b(\mathcal{M}_1 \otimes \mathbb{Q})$ 93
7.1. Tensor structure 93
7.2. A formula for the internal Hom 95

8. The Albanese complexes and their basic properties 97
8.1. Motives of singular schemes 97
8.2. The homological Albanese complex 98
8.3. The cohomological Picard complex 101
8.4. Relative LAlb and RPic 103
8.5. The Borel-Moore Albanese complex 103
8.6. Cohomological Albanese complex 104
8.7. Compactly supported and homological Pic 105
8.8. Topological invariance 105

Part III. Some computations 107

9. Computing $\mathrm{LAlb}(X)$ and $\mathrm{RPic}(X)$ for smooth X 109
9.1. The Albanese scheme 109
9.2. The main theorem 110
9.3. Reformulation of Theorem 9.2.2 111
9.4. Proof of Theorem 9.3.2 112
9.5. An application 113
9.6. $\mathrm{RPic}(X)$ 113

10. 1-motivic homology and cohomology of singular schemes 115
10.1. $\mathcal{A}_{X/k}$ for $X \in \mathrm{Sch}(k)$ 115
10.2. The éh topology 116
10.3. Blow-up induction 118
10.4. $\mathrm{L}_i\mathrm{Alb}(X)$ for X singular 119
10.5. The cohomological 1-motives $\mathrm{R}^i\mathrm{Pic}(X)$ 120
10.6. Borel-Moore variants 120

11. 1-motivic homology and cohomology of curves 121
11.1. "Chow-Künneth" decomposition for a curve 121
11.2. $\mathrm{L}_i\mathrm{Alb}$ and $\mathrm{R}^i\mathrm{Pic}$ of curves 121
11.3. Borel-Moore variants 123

12. Comparison with $\mathrm{Pic}^+, \mathrm{Pic}^-, \mathrm{Alb}^+$ **and** Alb^- 125
12.1. Torsion sheaves 125
12.2. Glueing lemmas 125
12.3. Discrete sheaves 127
12.4. Normal schemes 129
12.5. Some representability results 132
12.6. $\mathrm{L}_1\mathrm{Alb}(X)$ and the Albanese schemes 132
12.7. $\mathrm{L}_1\mathrm{Alb}(X)$ and $\mathrm{Alb}^-(X)$ for X normal 135
12.8. $\mathrm{RPic}(X)$ and $H^*_{\text{éh}}(X, \mathbb{G}_m)$ 136
12.9. $H^1_{\text{ét}}(X, \mathbb{G}_m)$ and $H^1_{\text{éh}}(X, \mathbb{G}_m)$ 137
12.10. $\mathrm{R}^1\mathrm{Pic}(X)$ and $\mathrm{Pic}^+(X)$ for X proper 137
12.11. The Borel-Moore variant 138
12.12. $\mathrm{L}_1\mathrm{Alb}^*$ and Alb^+ 140

13. Generalizations of Roĭtman's theorem 145
13.1. Motivic and classical Albanese 145
13.2. A variant of the Suslin-Voevodsky theorem 147
13.3. Change of topology and motivic Albanese map 147
13.4. A proof of Roĭtman's and Spieß-Szamuely's theorems 148
13.5. Generalization to singular schemes 150
13.6. Borel-Moore Roĭtman 151
13.7. "Cohomological" Roĭtman 152

Part IV. Realizations 155

14. An axiomatic version of Deligne's conjecture 157
14.1. A review of base change 157
14.2. A weight filtration on $\mathcal{M}_1 \otimes \mathbb{Q}$ 157
14.3. A left adjoint in the category of realizations 158
14.4. Realization functor 159
14.5. The base change theorem 161

15. The Hodge realization 165
15.1. $\mathrm{LAlb}^{\mathcal{T}}$ for mixed Hodge structures 165
15.2. Huber's Hodge realization functor 166
15.3. Deligne's conjecture 168
15.4. Deligne's Hodge realization functor 169

16. The mixed realization 171
16.1. $\mathrm{LAlb}^{\mathcal{T}}$ for mixed realizations 171
16.2. Huber's mixed realization functor 174
16.3. Deligne's conjecture 174

17. The ℓ-adic realization in positive characteristic 177