

348

ASTÉRISQUE

2012

SÉMINAIRE BOURBAKI

VOLUME 2010/2011

EXPOSÉS 1027-1042

(1027) *La méthode du retour en contrôlabilité  
et ses applications en mécanique des fluides*

Olivier GLASS

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

**LA MÉTHODE DU RETOUR EN CONTRÔLABILITÉ  
ET SES APPLICATIONS EN MÉCANIQUE DES FLUIDES**  
[d'après Coron et al.]

par **Olivier GLASS**

## **INTRODUCTION**

Un système de contrôle est une équation d'évolution dépendant d'un paramètre. La théorie du contrôle cherche à déterminer comment l'on peut choisir ce paramètre en fonction du temps afin de modifier la dynamique dans un sens prescrit. Le problème de contrôlabilité s'intéresse en particulier à la possibilité de faire passer l'état du système d'un point de départ à une cible prescrite, celui de stabilisation à la possibilité de rendre un point d'équilibre stable. Dans le cas d'équations non linéaires, l'approche usuelle pour obtenir ce type de propriété est de linéariser le système, puis d'obtenir un résultat sur le linéarisé par des méthodes classiques. Cependant dans de nombreux systèmes d'origine physique, le linéarisé n'est pas nécessairement contrôlable. La méthode du retour introduite par J.-M. Coron permet de contourner cet obstacle. Dans cet exposé, nous nous intéresserons d'abord au problème pour lequel cette méthode a été introduite, qui concerne la stabilisation de certains systèmes de dimension finie ; puis nous illustrerons la méthode par deux exemples issus de la mécanique des fluides incompressibles : l'un, dû à J.-M. Coron, concernant l'équation d'Euler, l'autre, dû à J.-M. Coron et S. Guerrero, concernant l'équation de Navier-Stokes.

## 1. SYSTÈMES DE CONTRÔLE

### 1.1. Définition et exemples

DÉFINITION 1.1. — *Un système de contrôle est une équation d'évolution munie d'un paramètre  $u$  appelé contrôle. Un tel système s'écrit généralement de manière formelle :*

$$(1) \quad \dot{y} = f(t, y, u),$$

où  $t$  désigne la variable temporelle, et où

- $y$  désigne l'état du système, appartenant pour chaque  $t$  à l'espace des états  $\mathcal{Y}$ ,
- $u$  désigne le contrôle qui représente un moyen d'influencer celui-ci, à choisir pour chaque  $t$  dans l'espace des contrôles admissibles  $\mathcal{U}$ .

Deux cas principaux se distinguent dans la théorie. Dans le premier,  $\mathcal{Y}$  et  $\mathcal{U}$  sont des espaces vectoriels ou des variétés de dimension finie, réels ou complexes, et l'équation (1) est une équation différentielle ordinaire. Dans le second,  $\mathcal{Y}$  et  $\mathcal{U}$  sont des espaces fonctionnels ou des parties d'espaces fonctionnels, et l'équation (1) est une équation aux dérivées partielles, dans laquelle le contrôle peut apparaître de différentes manières (au second membre de l'équation, dans les conditions aux limites, etc.).

La théorie du contrôle cherche à décrire dans quelle mesure on peut influencer l'état du système par une utilisation appropriée de la fonction de contrôle. Cela est motivé à la fois par les applications, par exemple le contrôle de systèmes en provenance de la mécanique des fluides, et par la théorie : on cherche à comprendre comment l'information se propage dans le système, pour permettre au contrôle de maîtriser la dynamique de celui-ci.

Donnons quelques exemples remarquables de systèmes de contrôle, dont il sera question dans la suite. Le premier est un exemple de système de contrôle de dimension finie.

*Exemple 1.2. — Systèmes de contrôle affines sans dérive.* On considère ici  $m$  champs de vecteurs de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^n$ . Le système considéré est le suivant :

$$(2) \quad \dot{y} = \sum_{i=1}^m u_i f_i(y),$$

où le contrôle est  $u = (u_i)_{i=1\dots m} \in \mathbb{R}^m$  et l'état  $y \in \mathbb{R}^n$ . Cet exemple est naturellement relié à la géométrie sous-riemannienne.

Les deux exemples suivants de systèmes de contrôle de dimension infinie proviennent de la mécanique des fluides. Les questions relatives au contrôle en mécanique des fluides ont été soulevées en particulier par J.-L. Lions [11].

*Exemple 1.3. — Contrôle frontière de l'équation d'Euler.* On considère l'équation d'Euler des fluides parfaits incompressibles, posée dans un domaine  $\Omega$  borné et régulier du plan  $\mathbb{R}^2$ . Pour un temps  $T > 0$  donné, le champ de vitesse du fluide  $v : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  et son champ de pression  $p : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  satisfont :

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} v(t, x) + (v(t, x) \cdot \nabla) v(t, x) + \nabla p(t, x) = 0 \text{ pour } (t, x) \text{ dans } [0, T] \times \Omega, \\ \operatorname{div} v(t, x) = 0 \text{ pour } (t, x) \text{ dans } [0, T] \times \Omega. \end{cases}$$

On rappelle la notation classique  $(v \cdot \nabla) = \sum_i v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ . La première équation rend compte de la conservation de la quantité de mouvement, la seconde de l'incompressibilité. En général, le système d'Euler est clos par la condition d'imperméabilité de la frontière

$$(4) \quad v(t, x) \cdot n(x) = 0 \text{ pour } (t, x) \text{ sur } [0, T] \times \partial\Omega,$$

où  $n$  est la normale unitaire extérieure sur  $\partial\Omega$ . Mais ici, on considère qu'une partie des données au bord peut être utilisée comme un contrôle. Plus précisément, on introduit  $\Sigma$  un ouvert non vide de  $\partial\Omega$ , et on considère que l'on dispose comme contrôle des données au bord sur  $\Sigma$ , tandis que la contrainte

$$(5) \quad v(t, x) \cdot n(x) = 0 \text{ pour } (t, x) \text{ sur } [0, T] \times (\partial\Omega \setminus \Sigma),$$

demeure sur le reste du bord. D'après V. Yudovich [13], on sait que les données que l'on peut imposer sur  $\Sigma$  pour déterminer le système, c'est-à-dire ici le contrôle, sont les suivantes :

– la vitesse normale sur  $[0, T] \times \Sigma$  :

$$v(t, x) \cdot n(x) = h(t, x) \text{ sur } [0, T] \times \Sigma,$$

avec la contrainte que  $h$  doit être de moyenne nulle pour chaque temps afin d'être compatible avec l'incompressibilité du modèle,

– et le tourbillon sur la partie « entrante » de  $\Sigma$  :

$$\operatorname{rot} u = \omega(t, x) \text{ sur } \Sigma_T^- := \{(t, x) \in [0, T] \times \partial\Omega / v(t, x) \cdot n(x) < 0\}.$$

L'état du système est le champ de vitesse  $v$ . Comme il est classique en mécanique des fluides incompressibles, la pression n'est pas ici une réelle inconnue du système.

*Exemple 1.4. — Contrôle interne de l'équation de Navier-Stokes.* On se place ici dans le tore de dimension 2, où l'on pose l'équation de Navier-Stokes incompressible :

$$(6) \quad \begin{cases} \partial_t v(t, x) + (v(t, x) \cdot \nabla) v(t, x) - \Delta v(t, x) + \nabla p(t, x) = f(t, x) \text{ dans } [0, T] \times \mathbb{T}^2, \\ \operatorname{div} v(t, x) = 0 \text{ pour } (t, x) \text{ dans } [0, T] \times \mathbb{T}^2, \end{cases}$$

où, comme dans l'exemple précédent,  $v : [0, T] \times \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  désigne le champ de vitesse du fluide et  $p : [0, T] \times \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  son champ de pression. Ici,  $f$  désigne un champ de force réparti dans le domaine. Le système de contrôle interne consiste à considérer comme

un contrôle une telle force, localisée dans une partie du domaine. Soit donc  $\omega$  un ouvert non vide de  $\mathbb{T}^2$  ; le système de contrôle interne de l'équation de Navier-Stokes s'obtient en introduisant le contrôle  $u : [0, T] \times \omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  dans l'équation précédente sous la forme

$$(7) \quad f(t, x) = \chi_\omega(x)u(t, x),$$

c'est-à-dire avec un léger abus de notation que  $f = 0$  dans  $[0, T] \times (\mathbb{T}^2 \setminus \omega)$  et  $f = u$  dans  $[0, T] \times \omega$ . Cette écriture est destinée à rappeler que  $u$  est supporté dans  $\omega$  ; cela n'empêche pas de chercher un contrôle  $f$  régulier.

Là encore, l'état du système est le champ  $v$ .

Ces deux derniers exemples ne sont que des cas particuliers de systèmes de contrôle gouvernés par des EDP. Bien sûr, les systèmes de contrôle interne et frontière peuvent être étudiés pour beaucoup d'autres équations d'évolution ; par ailleurs il existe beaucoup de modèles où le contrôle apparaît de manière différente dans le système, comme par exemple dans les coefficients de l'opérateur différentiel lui-même.

## 1.2. Deux questions classiques en théorie du contrôle

Beaucoup de questions mathématiques différentes peuvent être soulevées à propos d'un système de contrôle. Nous nous intéresserons à deux d'entre elles en particulier. La première question est celle de contrôlabilité.

**DÉFINITION 1.5.** — *Soit  $T_0 < T_1$ . On dira que le système (1) est exactement contrôlable entre  $T_0$  et  $T_1$  lorsque, quel que soit le couple d'états possibles  $(y_0, y_1) \in \mathcal{Y}^2$ , il existe un contrôle  $u : [T_0, T_1] \rightarrow \mathcal{U}$  tel que la solution  $y : [T_0, T_1] \rightarrow \mathcal{Y}$  de (1) associée à  $u$  et partant de  $y|_{t=T_0} = y_0$  satisfasse :*

$$y|_{t=T_1} = y_1.$$

*Exemple 1.6.* — Un résultat classique, dû à W.-L. Chow et P. Rashevski, dit que pour le système (2), si en tout point  $x \in \mathbb{R}^n$

$$(8) \quad \{g(x), g \in \text{Lie}\{f_1, \dots, f_m\}\} = \mathbb{R}^n,$$

alors le système (2) est exactement contrôlable en temps arbitraire.

Une autre notion de contrôlabilité est fréquente, en particulier quand on considère le contrôle d'équations aux dérivées partielles paraboliques. L'effet régularisant de ces dernières empêche en général la contrôlabilité exacte d'avoir lieu. Le problème de zéro-contrôlabilité soulève la question, non contredite par cet effet régularisant, de la possibilité de ramener le système à un état d'équilibre fixé. Dans le cas des exemples 1.3 et 1.4, la question est la possibilité de ramener le fluide au repos.