348

# ASTÉRISQUE

2012

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2010/2011
EXPOSÉS 1027-1042

(1031) *Correspondance de Langlands p-adique, compatibilité local-global et applications*

Christophe BREUIL

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Séminaire BOURBAKI Janvier 2011
63e année, 2010-2011, no 1031, p. 119 à 147

# CORRESPONDANCE DE LANGLANDS $p$-ADIQUE, COMPATIBILITÉ LOCAL-GLOBAL ET APPLICATIONS [d'après Colmez, Emerton, Kisin, ...]

par **Christophe BREUIL**

## 1. INTRODUCTION ET NOTATIONS

Soit $p$ un nombre premier. Langlands, Deligne et Carayol ont montré dans [**33**], [**16**], [**10**] que l'on pouvait réaliser une partie de la correspondance de Langlands globale pour $\mathrm{GL}_2$ dans la cohomologie étale :

$$\varinjlim_K H^1_{\text{ét}}\big(Y(K)\times_{\mathbb{Q}}\overline{\mathbb{Q}},\mathbb{Q}_p\big)$$

où la limite est prise sur les sous-groupes ouverts compacts $K$ de $\mathrm{GL}_2$ des adèles finis de $\mathbb{Q}$ et où $Y(K)$ est la courbe modulaire (ouverte) de « niveau $K$ ». Plus précisément, si $\mathscr{O}_E$ est l'anneau des entiers d'une extension finie $E$ de $\mathbb{Q}_p$ contenant les valeurs propres de Hecke d'une forme modulaire parabolique propre de poids 2, l'espace $\varinjlim_K H^1_{\text{ét}}\big(Y(K)\times_{\mathbb{Q}}\overline{\mathbb{Q}},\mathscr{O}_E\big)\otimes_{\mathscr{O}_E}E$ contient $\rho_f\otimes_E\otimes'_\ell\pi_\ell(\rho_f|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_\ell}/\mathbb{Q}_\ell)})$ où $\rho_f$ est la représentation $p$-adique de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ associée à $f$ et $\pi_\ell(\rho_f|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_\ell}/\mathbb{Q}_\ell)})$ la représentation lisse de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_\ell)$ correspondant à la représentation galoisienne locale $\rho_f|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_\ell}/\mathbb{Q}_\ell)}$ par la correspondance de Langlands locale. De plus, $\pi_\ell(\rho_f|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_\ell}/\mathbb{Q}_\ell)})$ détermine (essentiellement) $\rho_f|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_\ell}/\mathbb{Q}_\ell)}$ si $\ell\neq p$. Ainsi, la correspondance de Langlands locale pour chaque $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_\ell)$ s'insère naturellement dans une correspondance globale qui se réalise sur un espace de cohomologie. On appelle cela « compatibilité local-global ».

Lorsque $\ell=p$, il n'est plus vrai en général que la représentation lisse $\pi_p(\rho_f|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)})$ détermine $\rho_f|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}$. La dernière décennie a vu l'émergence et la preuve d'une correspondance locale $p$-adique nouvelle pour le groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ qui associe à

(*) Je remercie chaleureusement M. Emerton pour ses réponses précises et détaillées à mes questions. Je remercie P. Colmez, J.-F. Dat, M. Emerton, G. Henniart, M. Kisin et V. Paškūnas pour leurs commentaires.

la représentation $\rho_f|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}$ un *espace de Banach p-adique* $B(\rho_f|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)})$ avec action continue de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ qui la détermine complètement (voir [**1**] pour un rapport). L'examen de cas particuliers non triviaux ([**5**], [**7**]) faisait fortement soupçonner que cette correspondance locale $p$-adique s'insérait aussi dans une correspondance globale se réalisant sur l'espace de cohomologie étale « complétée » :

$$\varinjlim_{K^p}\Big(\varinjlim_{K_p} H^1_{\text{ét}}\big(Y(K^pK_p)\times_{\mathbb{Q}}\overline{\mathbb{Q}},\mathcal{O}_E\big)\Big)^{\wedge}\otimes_{\mathcal{O}_E}E$$

où le chapeau $\wedge$ désigne le complété $p$-adique et où les limites inductives sont prises respectivement sur les sous-groupes ouverts compacts $K^p$ (resp. $K_p$) de $\mathrm{GL}_2$ des adèles finis hors $p$ (resp. de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$). C'est ce qu'Emerton vient de montrer dans un article récent ([**19**]) sur lequel est centré ce rapport.

Combinée avec des résultats précédents de Colmez ([**15**]), cette nouvelle compatibilité local-global entraîne d'abord la compatibilité entre la correspondance de Langlands locale classique et la correspondance de Langlands locale $p$-adique pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Kisin a alors montré ([**30**]) que cette dernière compatibilité classique/$p$-adique avait pour conséquence la conjecture sur les multiplicités modulaires de [**8**] (sous des hypothèses techniques faibles). Combinée avec la preuve de la conjecture de modularité de Serre par Khare-Wintenberger-Kisin et avec les résultats de promodularité que l'on en déduit, la compatibilité local-global d'Emerton a ensuite deux conséquences globales : la preuve de la conjecture de Fontaine-Mazur caractérisant les représentations de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ provenant des formes modulaires classiques et la preuve de la conjecture de Kisin caractérisant les représentations de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ provenant des formes modulaires surconvergentes (les deux sous des hypothèses techniques faibles). Notons que Kisin dans [**30**] déduit de la conjecture sur les multiplicités modulaires combinée avec la conjecture de modularité de Serre une autre preuve de la conjecture de Fontaine-Mazur (sous des hypothèses techniques légèrement différentes). Nous donnons ici un aperçu des résultats d'Emerton ainsi que de l'essentiel de leurs preuves. Mentionnons simplement que le cœur de la démonstration du résultat de compatibilité local-global d'Emerton est un argument de densité pour la topologie de Zariski (Proposition 4.7 ci-dessous).

Dans tout le texte, $E$ désigne une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, d'anneau d'entiers $\mathcal{O}_E$ et de corps résiduel $k_E$. On note $\varpi_E$ une uniformisante de $\mathcal{O}_E$. Les représentations sont toutes à coefficients soit dans $E$, soit dans $\mathcal{O}_E$, soit dans $\mathcal{O}_E/\varpi_E^n$ pour $n\geq 1$ (i.e. dans $k_E$ si $n=1$). Si $\rho$ est une représentation $E$-linéaire continue d'un groupe compact, on note $\overline{\rho}$ la semi-simplification de la réduction modulo $\varpi_E$ d'un $\mathcal{O}_E$-réseau quelconque stable par ce groupe (lorsque ce groupe est $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, $\overline{\rho}$ sera en fait supposée irréductible). On note $\mathbb{A}_f$ (resp. $\mathbb{A}_f^p$) les adèles finis (resp. les adèles finis hors $p$) de $\mathbb{Q}$. Si $\Sigma$ est un ensemble fini de nombres premiers, on note $\mathbb{A}_f^\Sigma$ les adèles finis de $\mathbb{Q}$ hors $\Sigma$. Si $\ell$ est un nombre premier, on note $\mathrm{Frob}_\ell$ un Frobenius arithmétique de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_\ell}/\mathbb{Q}_\ell)$, c'est-à-dire un élément qui s'envoie sur $x \mapsto x^\ell \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}_\ell}/\mathbb{F}_\ell)$. On normalise les applications de réciprocité de la théorie du corps de classes local de telle sorte que $\mathrm{Frob}_\ell^{-1}$ corresponde à une uniformisante de $\mathbb{Q}_\ell$. On note $\varepsilon$ le caractère cyclotomique $p$-adique de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ de même que sa restriction aux sous-groupes de décomposition $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_\ell}/\mathbb{Q}_\ell)$ (quel que soit le premier $\ell$), et $\overline{\varepsilon}$ sa réduction modulo $p$. On voit sans commentaire $\varepsilon$ et $\overline{\varepsilon}$ comme des caractères de $\mathbb{Q}_\ell^\times$ via l'injection de $\mathbb{Q}_\ell^\times$ dans l'abélianisé de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_\ell}/\mathbb{Q}_\ell)$ donnée par la théorie du corps de classes local. On note $\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}}$ l'extension non ramifiée maximale de $\mathbb{Q}_p$. On fixe enfin des plongements $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$, $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$ et $E \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$ ce qui permet d'associer à une forme modulaire parabolique classique ou survonvergente $f$ vecteur propre des opérateurs de Hecke (et dont les valeurs propres se retrouvent dans $E$) une représentation $E$-linéaire continue $\rho_f$ de dimension 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$.

## 2. LE RÉSULTAT PRINCIPAL ET SES APPLICATIONS

### 2.1. Les théorèmes de compatibilité local-global

Pour $K \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$ sous-groupe ouvert compact, on note $Y(K)$ la courbe modulaire affine définie sur $\mathbb{Q}$ dont les points complexes $Y(K)(\mathbb{C})$ sont :

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\backslash\Big(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})/\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})\mathbb{R}^{+\times} \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)/K\Big) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\backslash\big((\mathbb{C}-\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)/K\big).$$

On pose :

$$\widehat{H}^1(K^p)_{\mathcal{O}_E} \stackrel{\text{déf}}{=} \varprojlim_n \varinjlim_{K_p} H^1_{\text{ét}}\big(Y(K^pK_p) \times_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}, \mathcal{O}_E/\varpi_E^n\mathcal{O}_E\big)$$

où $K^p$ désigne un sous-groupe ouvert compact de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f^p)$ et où la limite inductive est prise sur les sous-groupes ouverts compacts $K_p$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. On peut aussi voir $\widehat{H}^1(K^p)_{\mathcal{O}_E}$ comme le *complété p-adique* du $\mathcal{O}_E$-module libre $\varinjlim_{K_p} H^1_{\text{ét}}\big(Y(K^pK_p) \times_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}, \mathcal{O}_E\big)$. On note $\widehat{H}^1(K^p)_E \stackrel{\text{déf}}{=} \widehat{H}^1(K^p)_{\mathcal{O}_E} \otimes_{\mathcal{O}_E} E$ : c'est un espace de Banach $p$-adique avec $\widehat{H}^1(K^p)_{\mathcal{O}_E}$ comme boule unité. Il est muni d'une action continue de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ qui préserve la boule unité. Enfin on note :

$$\widehat{H}^1_{\mathcal{O}_E} \stackrel{\text{déf}}{=} \varinjlim_{K^p} \widehat{H}^1(K^p)_{\mathcal{O}_E} \quad \text{et} \quad \widehat{H}^1_E \stackrel{\text{déf}}{=} \widehat{H}^1_{\mathcal{O}_E} \otimes_{\mathcal{O}_E} E = \varinjlim_{K^p} \widehat{H}^1(K^p)_E$$

que l'on munit de la topologie limite inductive des topologies des $\widehat{H}^1(K^p)_{\mathcal{O}_E}$ et $\widehat{H}^1(K^p)_E$. On a $(\widehat{H}^1_E)^{K^p} = \widehat{H}^1(K^p)_E$. L'action naturelle de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$ sur $\widehat{H}^1_{\mathcal{O}_E}$ et $\widehat{H}^1_E$ est continue (l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f^p)$ est lisse).

On dit qu'une représentation linéaire continue absolument irréductible de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sur un $E$-espace vectoriel de dimension 2 est *promodulaire* si elle provient d'une forme modulaire $p$-adique parabolique propre (voir Définition 4.2 pour une définition plus précise). Une représentation promodulaire est *impaire* (i.e. l'image de la conjugaison complexe sur $\overline{\mathbb{Q}}$ a pour déterminant $-1$) et le théorème 2.4 ci-dessous dit que presque toute représentation impaire est en fait promodulaire.

Nous énonçons le résultat principal de ce texte en deux versions, l'une « faible » et l'autre « forte ».

Théorème 2.1 (Compatibilité local-global version faible [**19**])

*Soit $\rho$ une représentation $E$-linéaire continue impaire de dimension 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ qui est non ramifiée en dehors d'un ensemble fini de nombres premiers. On suppose $\overline{\rho}$ absolument irréductible et $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)} \not\cong \left(\begin{smallmatrix} 1 & * \\ 0 & \varepsilon \end{smallmatrix}\right)$ à torsion près par un caractère (avec $*$ nul ou non).*

(i) *Si $\rho$ est promodulaire, alors il existe un ensemble fini de nombres premiers $\Sigma$ contenant $p$ et les places où $\rho$ est ramifiée tel que l'on ait un morphisme non nul continu $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f^{\Sigma})$-équivariant :*

$$(1) \qquad B\big(\rho|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}\big) \otimes_E \otimes'_{\ell \notin \Sigma} \pi_\ell\big(\rho|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_\ell}/\mathbb{Q}_\ell)}\big) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})}(\rho, \widehat{H}^1_E)$$

*où $B\big(\rho|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}\big)$ est la $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-représentation continue sur un espace de Banach $p$-adique associée à $\rho|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}$ par la correspondance de Langlands locale $p$-adique (voir §3 ou [**1**]) et où $\pi_\ell\big(\rho|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_\ell}/\mathbb{Q}_\ell)}\big)$ est la $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_\ell)$-représentation lisse associée à $\rho|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_\ell}/\mathbb{Q}_\ell)}$ par la correspondance de Langlands locale classique (voir la remarque 2.3* (i), (ii)*).*

(ii) *Si $\rho|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}$ n'est ni la somme directe de deux caractères, ni une extension d'un caractère par lui-même, alors tout morphisme comme en* (1) *est une injection fermée.*

Lorsque $\ell \in \Sigma$, le groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_\ell)$ agit sur le $E$-espace vectoriel des morphismes comme en (1) via son action sur $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})}(\rho, \widehat{H}^1_E)$. La version forte précise cette action :

Théorème 2.2 (Compatibilité local-global version forte [**19**])

*Conservons les hypothèses du théorème 2.1 et supposons de plus $\overline{\rho}|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)} \not\cong \left(\begin{smallmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ à torsion près par un caractère (avec $*$ nul ou non). Si $\rho$ est promodulaire, alors on a un isomorphisme topologique $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f^{p})$-équivariant :*

$$(2) \qquad B(\rho|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}) \otimes_E \otimes'_{\ell \neq p} \pi_\ell(\rho|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_\ell}/\mathbb{Q}_\ell)}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})}(\rho, \widehat{H}^1_E).$$