348

ASTÉRISQUE

2012

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2010/2011
EXPOSÉS 1027-1042

(1032) *Relations de dépendance et intersections exceptionnelles*

Antoine CHAMBERT-LOIR

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Séminaire BOURBAKI Janvier 2011
63e année, 2010-2011, no 1032, p. 149 à 188

RELATIONS DE DÉPENDANCE ET INTERSECTIONS EXCEPTIONNELLES

par **Antoine CHAMBERT-LOIR**

1. RELATIONS DE DÉPENDANCE

Cet exposé est consacré à un ensemble de travaux apparus depuis une quinzaine d'années sous la plume de divers mathématiciens autour de ce qu'on appelle maintenant la *conjecture de Zilber–Pink*. Je voudrais débuter avec le cas le plus simple et le plus frappant.

THÉORÈME 1.1. — *Soit C une courbe algébrique complexe (irréductible) et considérons n fonctions rationnelles $f_1, \ldots, f_n$ non identiquement nulles et multiplicativement indépendantes sur C. Alors, les points x de C où leurs valeurs $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ vérifient au moins deux relations de dépendance multiplicative indépendantes forment un ensemble fini.*

Dire que $f_1, \ldots, f_n$ sont multiplicativement indépendantes signifie que pour tout vecteur non nul $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{Z}^n$, la fonction rationnelle $f_1^{a_1} \ldots f_n^{a_n}$ sur C n'est pas constante de valeur 1.

De même, si x est un point de C qui n'est ni un zéro ni un pôle des f_i, les relations de dépendance multiplicative entre les valeurs $f_i(x)$ des f_i sont les vecteurs $(a_1, \ldots, a_n)$ de $\mathbf{Z}^n$ tels que $\prod_{i=1}^n f_i(x)^{a_i} = 1$. Ces relations forment un sous-groupe de $\mathbf{Z}^n$; le théorème concerne les points x pour lesquels ce sous-groupe est de rang $\geqslant 2$.

Sous l'hypothèse que les fonctions f_i sont multiplicativement indépendantes modulo les constantes, c'est-à-dire qu'aucune combinaison non triviale $\prod f_i^{a_i}$ n'est constante, ce théorème a été démontré par E. Bombieri, D. Masser et U. Zannier dans l'article [**12**] qui, le premier, a mis en avant ces questions. L'hypothèse supplémentaire a été levée par G. Maurin [**42**], puis, par une autre approche, par Bombieri, P. Habegger, Masser et Zannier [**11**]. Ces articles reposent sur des techniques de géométrie diophantienne et supposent en outre que toute la situation est définie sur le corps $\overline{\mathbf{Q}}$ des nombres algébriques. Dans l'intervalle, l'article [**16**] démontre que ce cas entraîne le théorème sur le corps des nombres complexes.

Remarquons pour finir que l'énoncé est optimal au sens où l'ensemble des points x de C où les valeurs $f_1(x), \dots, f_n(x)$ sont multiplicativement dépendantes est *infini* (à moins que les f_i ne soient toutes constantes). Si, disons, f_1 n'est pas constante, il suffit de considérer l'ensemble des points x de C tels que $f_1(x)$ soit une racine de l'unité.

Malgré la simplicité de l'énoncé ci-dessus, il convient de l'écrire dans le cadre plus général des groupes algébriques commutatifs, voire des variétés de Shimura mixtes. Il s'insère alors dans un faisceau de conjectures dues à B. Zilber [**82**], S.-W. Zhang (non publié, voir [**13**]), R. Pink [**50**] (voir aussi [**49**]) et Bombieri, Masser, Zannier [**13**]. Par ailleurs, et ce n'est pas l'aspect le moins fascinant du sujet, ces conjectures complètent les conjectures de type Manin–Mumford, Mordell–Lang et André–Oort. Toutefois, je me limiterai au cas des groupes algébriques dans ce rapport et ne dirai rien de la conjecture d'André–Oort dont l'importance et la beauté des derniers développements, dus pour l'essentiel à J. Pila (voir [**46**]), exigent qu'un exposé autonome leur soit consacré. Signalons quand même qu'ils trouvent leur origine dans la nouvelle démonstration de la conjecture de Manin–Mumford qu'ont découverte Pila et Zannier [**47**] et que ces techniques jouent un rôle dans l'étude de questions voisines que nous évoquerons à la fin de ce rapport.

Revenons au théorème 1.1. Puisque l'on discute de relations de dépendance multiplicative, introduisons donc le groupe multiplicatif (complexe) $\mathbf{G}_{\mathrm{m}} = \mathbf{A}^1 \setminus \{0\}$ et considérons la famille des fonctions $f_1, \dots, f_n$ comme une application rationnelle f de C dans le *tore algébrique* $G = \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$. Notons X son image, ou plutôt l'adhérence, pour la topologie de Zariski dans G, de l'image d'un ouvert dense de C sur lequel f est définie. Laissons de côté le cas inintéressant où les f_i sont toutes constantes ; l'application f est alors de degré fini et X est une courbe irréductible dans G. Comme les f_i sont multiplicativement indépendantes, la courbe X n'est contenue dans aucun sous-groupe algébrique strict de G : de tels sous-groupes sont en effet définis par des équations monomiales $g_1^{a_1} \dots g_n^{a_n} = 1$ en les coordonnées $(g_1, \dots, g_n) \in \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$. Plus précisément, les sous-groupes algébriques (pas forcément connexes) de G sont en bijection avec les sous-modules de $\mathbf{Z}^n$, la codimension d'un sous-groupe étant égale au rang du module de ses relations. Pour tout entier $r \in \mathbf{N}$, notons ainsi $G^{[r]}$ la réunion des sous-groupes algébriques de G qui sont de codimension $\geqslant r$; c'est aussi l'ensemble des points $(g_1, \dots, g_n) \in \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ qui vérifient r relations de dépendance multiplicative indépendantes. Ainsi, le théorème 1.1 équivaut à l'énoncé suivant :

THÉORÈME 1.1′. — *Soit X une sous-variété fermée de $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$, irréductible et de dimension* 1*, qui n'est contenue dans aucun sous-groupe algébrique strict. L'ensemble*

$X \cap G^{[2]}$ des points x de X qui sont contenus dans un sous-groupe de codimension $\geqslant 2$ est fini.

Les conjectures auxquelles ce rapport est consacré visent à remplacer le groupe G par une variété semi-abélienne, la courbe X par une sous-variété fermée de G, irréductible et distincte de G, de dimension quelconque d, et l'ensemble $G^{[2]}$ par un ensemble $G^{[c]}$, où c est un entier tel que $c > d$, voire un ensemble de la forme $\Gamma \cdot G^{[c]}$ où Γ est un sous-groupe de rang fini de G, et même, lorsque tout est défini sur le corps des nombres algébriques, des « épaississements » d'un tel ensemble au sens de la théorie des hauteurs.

Dans ce cas, une généralisation naturelle du théorème 1.1′ est la conjecture suivante de R. Pink (voir [**49**], conjecture 5.1). Avant de l'énoncer, rappelons qu'une variété semi-abélienne est un groupe algébrique commutatif qui se décompose en une extension d'une variété abélienne par un tore ; un sous-groupe algébrique connexe d'une variété semi-abélienne est encore une variété semi-abélienne.

CONJECTURE 1.2. — *Soit G une variété semi-abélienne complexe. Soit X une sous-variété fermée et irréductible de G, de dimension d. Si X n'est pas contenue dans un sous-groupe algébrique strict de G, l'intersection $X \cap G^{[d+1]}$ n'est pas dense dans X pour la topologie de Zariski.*

Cette conjecture est connue lorsque X est une courbe ($d = 1$) et G un tore ; on retrouve le théorème 1.1′. Pour l'essentiel, tous les autres résultats se restreignent au cas de variétés définies sur le corps $\overline{\mathbf{Q}}$ des nombres algébriques et peuvent donc ne considérer que des points algébriques. Toujours lorsque $d = 1$, un théorème de G. Rémond établit cette variante pour les variétés abéliennes à multiplications complexes ([**64**], corollaire 1.6), tandis qu'un résultat plus récent d'E. Viada (*cf.* [**27**], théorème H) traite le cas des variétés abéliennes qui sont produit de variétés abéliennes à multiplications complexes, surfaces abéliennes et courbes elliptiques. En dimension plus grande, à l'exception de quelques cas comme les sous-variétés de codimension 2 d'un tore (théorème 1.7 de [**14**]), cette conjecture n'est démontrée que sous une hypothèse géométrique sur X. Introduisons une terminologie proposée par Z. Ran dans le cas des variétés abéliennes (voir [**55**]) :

DÉFINITION 1.3. — *Soit X une sous-variété (fermée, irréductible) d'une variété semi-abélienne G. On dit que X est* géométriquement dégénérée *s'il existe un sous-groupe algébrique G' de G, tel que l'image de X dans G/G' est de dimension strictement inférieure à* $\min(\dim(X), \dim(G/G'))$.

Pour qu'une courbe soit géométriquement dégénérée, il faut et il suffit qu'elle soit contenue dans un translaté d'un sous-groupe algébrique strict. En revanche, en dimension supérieure, il peut exister des sous-variétés géométriquement dégénérées qui ne sont contenues dans aucun translaté de sous-groupe algébrique.

THÉORÈME 1.4 (Habegger, [**29, 31**]). — *Soit G une variété semi-abélienne définie sur $\overline{\mathbf{Q}}$. Soit X une sous-variété fermée, irréductible et de dimension d, définie sur $\overline{\mathbf{Q}}$, qui n'est pas géométriquement dégénérée. Supposons de plus que G soit un tore ou une variété abélienne à multiplications complexes. Alors $X(\overline{\mathbf{Q}}) \cap G^{[d+1]}$ n'est pas dense dans X pour la topologie de Zariski.*

Expliquons maintenant le lien entre la conjecture 1.2 et celles de Manin–Mumford ou de Mordell–Lang.

Un point g de G est de torsion si et seulement s'il appartient à un sous-groupe algébrique de dimension 0 (celui qu'il engendre !) ; par suite, la conjecture 1.2 étend la conjecture de Manin–Mumford qui concerne précisément les points de torsion de G situés sur la sous-variété X. Rappelons que cette conjecture a été démontrée par M. Laurent [**38**] pour les tores, M. Raynaud [**57, 56**] dans le cas des variétés abéliennes, et M. Hindry [**32**] en général. Profitons aussi de l'occasion pour mentionner diverses preuves plus récentes : [**69**], via la preuve d'une conjecture de Bogomolov ([**80, 17, 22, 79**] pour les tores, [**74, 81, 21**] pour les variétés abéliennes, [**23**] pour les variétés semi-abéliennes), *via* la théorie des modèles de corps aux différences ([**34**] et [**51, 52, 68**] qui s'en inspirent), enfin [**47**].

Soit maintenant Γ un sous-groupe de G de rang fini r ; soit $(g_1, \dots, g_r)$ des éléments de Γ tels que $\Gamma/\langle g_1, \dots, g_r\rangle$ soit de torsion. Reprenant un argument de Rémond qui consiste à remplacer G par une puissance $G \times G^r$ et X par la sous-variété $X \times \{(g_1, \dots, g_r)\}$, Pink observe que la conjecture 1.2 est équivalente à la conjecture suivante :

CONJECTURE 1.5. — *Soit G une variété semi-abélienne complexe. Soit X une sous-variété fermée de G, irréductible et distincte de G, de dimension d. Soit Γ un sous-groupe de rang fini de G. Si X n'est pas contenue dans un translaté de sous-groupe algébrique strict de G, l'intersection $X \cap (\Gamma \cdot G^{[d+1]})$ n'est pas dense dans X pour la topologie de Zariski.*

Bien sûr, si $X \neq G$, $G^{[d+1]}$ n'est pas vide et $\Gamma \cdot G^{[d+1]}$ contient Γ, donc la conjecture 1.5 entraîne en particulier la conjecture de Mordell–Lang selon laquelle $X \cap \Gamma$ n'est pas dense dans X. Rappelons que celle-ci est maintenant un théorème, suite aux travaux de P. Liardet [**39**] pour les courbes dans les tores, M. Laurent [**38**] pour les tores, G. Faltings [**26**] pour les variétés abéliennes, M. Hindry [**32**], P. Vojta [**78**] et M. McQuillan [**44**] pour les variétés semi-abéliennes.

Rémond et Maurin ont tiré parti de la méthode de Vojta pour établir le résultat suivant en direction de la conjecture 1.5, analogue avec un groupe Γ du théorème 1.4.