348

ASTÉRISQUE

2012

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2010/2011
EXPOSÉS 1027-1042

(1034) *Inégalités isopérimétriques quantitatives via le transport optimal*

Filippo SANTAMBROGIO

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Séminaire BOURBAKI Janvier 2011
63e année, 2010-2011, n° 1034, p. 219 à 231

INÉGALITÉS ISOPÉRIMÉTRIQUES QUANTITATIVES VIA LE TRANSPORT OPTIMAL [d'après A. Figalli, F. Maggi et A. Pratelli]

par **Filippo SANTAMBROGIO**

INTRODUCTION

L'inégalité isopérimétrique est une inégalité géométrique qui établit une relation entre le volume et le périmètre d'une forme dans $\mathbb{R}^n$. Connue dans sa forme plus simple depuis l'antiquité, comme son nom l'indique elle concerne la recherche du corps qui, à périmètre égal, maximise le volume. De manière analogue, elle indique aussi l'objet qui minimise le périmètre à volume fixé et, comme on sait que la forme optimale est celle de la boule, en connaissant son volume et son périmètre et en choisissant une formulation invariante par dilatations, on peut l'écrire comme une inégalité vraie pour tout ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$

$$P(E) \geq n|E|^{1-\frac{1}{n}}|B|^{\frac{1}{n}}, \tag{1}$$

où P indique le périmètre, $|\cdot|$ la mesure de Lebesgue n-dimensionnelle, et B la boule unité de $\mathbb{R}^n$.

Cette inégalité peut être énoncée pour des ensembles E réguliers, pour lesquels la définition de $P(E)$ et $|E|$ ne présente pas d'ambiguïté, mais elle peut également être étendue à des ensembles E beaucoup plus généraux, grâce à la théorie des ensembles de périmètre fini, qui est d'ailleurs le cadre variationnel le plus adapté pour ce genre de problèmes. En effet, les problèmes de minimisation du périmètre risquent toujours d'être mal posés quand on les considère sur la classe des ensembles réguliers, bien que celui-ci précisément (minimiser le périmètre à volume contraint) ne le soit pas, tout simplement parce qu'on sait que la solution est la boule. Il convient donc de définir plus proprement l'objet périmètre par voie de la théorie des fonctions BV.

Par définition, on dit qu'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ est à variation bornée (BV, Bounded Variation en anglais) si ses dérivées au sens des distributions sont des mesures finies. Autrement dit, son gradient distributionnel est une mesure vectorielle. Cette mesure aura typiquement, entre autres, une partie absolument continue ainsi qu'une partie « de saut », concentrée sur un ensemble de dimension $n-1$. Pour un ensemble E, on dit qu'il est de périmètre fini si sa fonction indicatrice I_E est BV. On définira $P(E)$ comme la masse totale de la mesure vectorielle DI_E (il est utile de rappeler que toute mesure vectorielle μ admet une mesure « variation totale », scalaire et positive, $||\mu||$, telle que $\mu = f \cdot ||\mu||$, satisfaisant $||\mu||-$p.p. l'égalité $||f|| = 1$, et que la masse totale de μ, égale à $||\mu||(\mathbb{R}^n)$, est la norme de μ dans l'espace de Banach des mesures vectorielles finies). Évidemment, pour tout ensemble régulier E, son gradient sera donné par une mesure portée par sa frontière, ayant comme densité par rapport à la mesure de Hausdorff $\mathscr{H}^{n-1}$ le vecteur normal sortant ν_E. La masse totale de cette mesure serait donc $\int_{\partial E} ||\nu_E|| d\mathscr{H}^{n-1} = \mathscr{H}^{n-1}(\partial E)$. Pour un ensemble moins régulier, le rôle de la frontière topologique ∂E sera joué par un ensemble plus petit, appelé *frontière réduite*, et défini comme l'ensemble $\partial^* E$ des points x tels que

$$\lim_{r \to 0} \frac{DI_E(B_r(x))}{||DI_E||(B_r(x))} \quad \text{existe et appartient à } S^{n-1}.$$

Cette limite sera indiquée $-\nu_E$ et son opposé jouera exactement le rôle de la normale sortante. La même formule intégrale pour $P(E)$ sera alors vraie en remplaçant ∂E par $\partial^* E$. D'autres notions remarquables de frontière « essentielle » peuvent être définies et elles coïncident toutes, à des ensembles $\mathscr{H}^{n-1}$-négligeables près. Il est intéressant de remarquer que la frontière réduite coïncide également, modulo $\mathscr{H}^{n-1}$, avec l'ensemble des points de densité $\frac{1}{2}$ de E.

Ces notions générales ont permis d'établir une définition de *périmètre anisotrope* et d'en regarder l'inégalité isopérimétrique correspondante, ceci autant pour son intérêt géométrique ou ses applications à la tension superficielle des cristaux que pour un désir de généralisation mathématique abstraite.

Étant donné un convexe borné $K \subset \mathbb{R}^n$, contenant 0 dans son intérieur, on peut lui associer une norme $|| \cdot ||_K$ sur $\mathbb{R}^n$ définie par $||x||_K := \sup\{x \cdot y,\, y \in K\}$ (norme qui peut ne pas être symétrique si K ne l'est pas). Dans la suite, on considérera également sa norme duale $||x||_K^*$, qui est caractérisée par $\{x : ||x||_K^* \leq 1\} = K$. Comme 0 appartient à l'intérieur de K, qui est borné, il existe une boule centrée à l'origine contenue dans K et une autre qui le contient, ce qui fait qu'on peut trouver deux constantes $m_K \leq M_K$ telles que $m_K||x|| \leq ||x||_K \leq M_K||x||$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. On peut ensuite définir un périmètre anisotrope P_K, ou K-périmètre, en prenant

$$P_K(E) := \int_{\partial^* E} ||\nu_E||_K \, d\mathscr{H}^{n-1}.$$

Il est important de remarquer que cette quantité correspond en effet à la norme de la mesure « gradient distributionnel de I_E » dans l'espace des mesures vectorielles, quand les normes des vecteurs sont évaluées avec la norme $|| \cdot ||_K$ (c'est-à-dire que l'on peut redéfinir le concept de variation totale d'une mesure en remplaçant la norme euclidienne par cette norme). Il sera également utile, pour toute fonction $h \in BV(\mathbb{R}^n)$, de considérer la mesure positive donnée par sa K-variation totale, notée $||Dh||_K$ (ce qui coïncide avec la mesure de densité égale à $||Dh||_K$ pour $h \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$). De cette manière on a $P_K(E) = ||-DI_E||_K(\mathbb{R}^n)$ (le signe négatif étant important ici, puisque la norme n'est pas symétrique).

La question de l'inégalité isopérimetrique anisotrope surgit alors tout de suite, et la réponse avait été suggérée par Wulf [**13**] au début du XX$^{\text{e}}$ siècle et prouvée ensuite par Gromov [**12**] : l'ensemble optimal est l'ensemble K lui-même, ce qui donnerait

$$P_K(E) \geq n|E|^{1-\frac{1}{n}}|K|^{\frac{1}{n}}. \tag{2}$$

Une fois les deux inégalités (1) et (2) établies, et une fois qu'on sait (ce qui est vrai) que les ensembles optimaux sont uniques (seulement la boule et seulement K, aux translations et aux dilatations près), la question suivante porte alors sur la stabilité des ensembles optimaux, et notamment : si un corps E est presque optimal dans l'inégalité isopérimetrique (c'est-à-dire s'il réalise presque l'égalité dans (1)), peut-on dire qu'il est presque une boule, et dans quel sens, et de même les ensembles presque optimaux dans (2) sont-ils proches de K ? Dans l'interprétation relative à l'énergie des cristaux, ceci signifie : « si on donne une petite quantité d'énergie à un cristal de forme K, peut-on quantifier la modification de sa forme ? ».

Ces questions sont précisées de la manière suivante : le *déficit isopérimetrique* $\delta(E)$ de E est introduit comme étant

$$\delta(E) := \frac{P_K(E)}{n|E|^{1-\frac{1}{n}}|K|^{\frac{1}{n}}} - 1$$

(dorénavant, puisque le cas de l'inégalité isopérimétrique standard correspond au cas où $K = B$, dans la plupart des énoncés nous allons nous limiter au cas anisotrope) et l'*index d'asymétrie* $A(E)$ est défini par

$$A(E) := \inf\left\{\frac{|E\Delta(x_0 + rK)|}{|E|}\ :\ x_0 \in \mathbb{R}^n,\ r^n|K| = |E|\right\}$$

(la proportion de volume de la différence symétrique entre E et une copie de K du même volume, à des translations près).

La question revient alors à estimer $\delta(E)$ en termes de $A(E)$.

Le résultat principal du papier de Figalli, Maggi et Pratelli ([**6**]) est justement d'établir une inégalité de ce genre, et ce avec un exposant optimal :

$$A(E) \leq C(n)\sqrt{\delta(E)}. \tag{3}$$

La constante $C(n)$ qu'ils ont n'est pas forcément optimale, mais l'exposant 1/2 pour l'asymétrie l'est. De plus, ils trouvent une constante $C(n)$ avec une croissance polynomiale en n et qui ne dépend pas de K.

Auparavant, de nombreuses recherches s'étaient concentrées sur le cas « euclidien » (quand $K = B$), en obtenant d'abord une preuve en dimension 2 ([**1, 2**]), ensuite parmi les E convexes ([**7**]) en dimension quelconque, puis sans la contrainte de convexité mais avec un exposant $\frac{1}{4}$ non-optimal ([**9**]). Ce ne sont que les travaux récents de Fusco, Maggi et Pratelli ([**8**]) qui ont clos la question.

Or, dans tous ces travaux, la technique principale se base sur un procédé de symétrisation (la symétrisation de Steiner), qui permet d'établir que le périmètre d'un ensemble décroît si on le remplace par des versions plus symétriques qui préservent son volume. Ceci admet aussi des versions quantitatives, mais ces outils ne sont pas disponibles pour le cas d'un convexe K quelconque et ne sont donc applicables que pour le cas euclidien. Des résultats sur la stabilité pour l'inégalité anisotrope existaient néanmoins, le plus complet étant celui de [**5**], mais qui n'arrive pas à l'exposant optimal.

Pour suivre la stratégie de [**6**], on présentera d'abord les démonstrations, basées sur des outils de transport de mesure, de l'inégalité et de l'unicité de l'ensemble optimal, en remarquant ce qui pourrait se transformer en inégalité quantitative. Ensuite, on examinera les différents passages qui permettent d'arriver à prouver l'estimation (3).

1. PREUVES PAR TRANSPORT

1.1. Transport monotones : Knothe et Brenier

Nous introduisons ici le concept de *transport de mesures*, même si on le présentera seulement dans le cas de mesures absolument continues : étant données deux densités $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ de même masse totale $\int f(x)dx = \int g(x)dx$ (à support compact, par simplicité), on dit qu'une application $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ transporte (ou envoie) f sur g si pour tout ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$ on a $\int_{T^{-1}(A)} f(x)dx = \int_A g(x)dx$. Si T est injectif et suffisamment régulier, cette condition équivaut à une condition sur le jacobien : $|\det(DT)| = f/g(T)$.

Des applications de transport existent toujours, et on va en voir des exemples importants. Nous commençons d'abord avec le cas $n = 1$. Dans ce cas, nous sommes intéressés surtout par le transport monotone croissant. Il y en a toujours un, défini de manière unique presque partout par $\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{T(x)} g(t)dt$.

En dimension supérieure, il y a au moins deux extensions intéressantes de ce transport unidimensionnel. La première est celle connue comme *transport de Knothe* ([**11**]), obtenue de la manière suivante : considérons les densités $f(x_1, x_2)$ et $g(x_1, x_2)$ sur $\mathbb{R}^2$ et tout d'abord leurs marges sur la variable x_1, définies par $f_1(x_1) = \int f(x_1, x_2)dx_2$ et $g_1(x_1) = \int g(x_1, x_2)dx_2$; il s'agit de deux densités sur $\mathbb{R}$ et on peut considérer le transport monotone T_1 envoyant f_1 sur g_1 ; ensuite on