348 ASTÉRISQUE

2012

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2010/2011
EXPOSÉS 1027-1042

(1038) *Sections rationnelles de fibrations sur les surfaces et conjecture de Serre*

Claire VOISIN

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Séminaire BOURBAKI Avril 2011
63e année, 2010-2011, no 1038, p. 317 à 337

SECTIONS RATIONNELLES DE FIBRATIONS SUR LES SURFACES ET CONJECTURE DE SERRE
[d'après de Jong, He et Starr]

par **Claire VOISIN**

INTRODUCTION

Soit $f : X \to B$ un morphisme surjectif, où X et B sont des variétés projectives lisses définies sur un corps algébriquement clos k. La fibre générique X_η est une variété projective définie sur le corps de fonctions $K = k(B)$. Concrètement, donnons-nous un plongement $X \subset B \times \mathbb{P}^N$. Au-dessus d'un ouvert affine dense U de B, les équations définissant X sont des polynômes homogènes P_i en les variables $X_0, \ldots, X_N$ à coefficients dans l'anneau de fonctions polynomiales $k[U]$. Alors X_η est la sous-variété de $\mathbb{P}^N_K$ définie par les mêmes équations P_i, vues dans $K[X_0, \ldots, X_N]$, K étant par définition le corps de fractions de $k[U]$. Cette fibre générique est lisse sur K si le corps k est de caractéristique zéro. Les K-points de X_η, c'est-à-dire, dans les notations précédentes, les $N+1$-uplets $(l_0, \ldots, l_N)$ non identiquement nuls d'éléments de K solutions des équations $P_i(l_0, \ldots, l_N) = 0$ (considérés à homothétie près), correspondent bijectivement aux sections *rationnelles* $\sigma : B \dashrightarrow X$ de f. Lorsque la base B est une courbe lisse, tout morphisme rationnel $B \dashrightarrow Y$, où Y est projective, est en fait un morphisme, et donc les K-points sont les sections de f. Cette traduction élémentaire met en relation des problèmes de nature diophantienne d'une part (trouver des solutions d'équations polynomiales sur un corps non algébriquement clos) et de nature géométrique d'autre part (construire une section (rationnelle) d'un morphisme).

Lorsque le corps k est le corps des nombres complexes, on peut aborder le versant géométrique du problème par des méthodes topologiques ou de théorie de Hodge, et ceci permet de décrire des obstructions explicites à l'existence de sections, comme on le verra dans le paragraphe 1.2. Dans certains cas, et même lorsque la base est une courbe, non seulement il n'existe pas de sections, mais encore le PGCD des degrés des multisections rationnelles (ou encore l'indice de la fibre générique, cf. paragraphe 1.2) ne vaut pas 1, et pourtant toutes ces obstructions s'annulent.

Ce type de problème peut être considéré en particulier pour des fibrations localement triviales, où « localement » signifie pour la topologie étale. La trivialité locale signifie donc que la fibration devient triviale sur des revêtements étales d'ouverts de Zariski de la base. En particulier on peut considérer les torseurs sous des groupes, qui géométriquement sont des fibrations admettant une action d'un groupe ou d'un schéma en groupe sur la base qui deviennent triviales (c'est-à-dire isomorphes au produit $B \times G$ ou au schéma en groupes en question) dès qu'elles ont une section. Même si le groupe G est connexe, on peut aisément construire de tels torseurs localement triviaux pour la topologie étale mais non dans la topologie de Zariski (voir paragraphe 1.2). La non-trivialité locale dans la topologie de Zariski est dans ce cas équivalente à la non existence d'une section rationnelle, ou encore d'un K-point de la fibre générique.

Pour obtenir des exemples projectifs, on considère certaines fibrations en variétés homogènes correspondant à ces G-torseurs. On verra en fait dans le paragraphe 3.1 que la trivialité d'un G-torseur peut souvent se ramener à l'existence d'une section (ou point rationnel) d'une famille de variétés homogènes projectives associée, par un argument classique de réduction du groupe structurel. Les exemples typiques sont donnés par les variétés de Brauer-Severi, qui sont des fibrés en espaces projectifs localement triviaux pour la topologie étale, mais n'admettent pas de sections rationnelles, et en particulier, ne sont pas obtenues en projectifiant un fibré vectoriel algébrique. Ce sont des fibrations en variétés homogènes associées à des G-torseurs, où $G = PGl_n$ (cf. [**3**]). Les variétés de Brauer-Severi non triviales n'existent pas sur les courbes (cf. [**12**]). Elles existent en abondance sur les surfaces, comme le montre le calcul explicite du groupe de Brauer (cf. paragraphe 1.2). Dans [**20**], Serre conjecture la trivialité des G-torseurs sur les corps de fonctions de surfaces définies sur un corps algébriquement clos lorsque le groupe algébrique G est connexe, semi-simple et simplement connexe. Cette conjecture a été montrée dans de nombreux cas (cf. [**9**]) par des méthodes de cohomologie galoisienne et de classification des groupes. L'une des contributions de l'article [**14**] de de Jong, He et Starr décrit ici est d'une part de compléter la démonstration (cf. paragraphe 3.1) et d'autre part de donner une approche totalement différente, complètement géométrique, du problème.

La trivialité des variétés de Brauer-Severi sur les courbes n'est qu'une partie d'une série d'énoncés ([**11**], [**10**]) de généralité croissante (cf. section 1.2) concernant l'existence de sections rationnelles de morphismes projectifs $f : X \to B$ avec B lisse. Le théorème suivant concernant le cas des familles d'intersections complètes est dû à Tsen et Lang (cf. [**11**]) :

THÉORÈME 0.1. — *Toute intersection de r hypersurfaces $Y_1, \dots, Y_r$ de degrés respectifs $d_1, \dots, d_r$ dans $\mathbb{P}^n_K$, $K = k(B)$, possède un K-point si k est algébriquement clos et $\sum_{i=1}^r d_i^d \leq n$, où $d = \dim B$.*

Lorsque la base est une courbe, c'est-à-dire $d = 1$, la condition numérique $\sum_{i=1}^r d_i \leq n$ est équivalente au fait que les fibres sont des variétés de Fano, à supposer qu'elles soient lisses. Le théorème a été généralisé dans ce cas par Graber, Harris, Starr (voir théorème 1.3) sur $\mathbb{C}$, puis par de Jong et Starr en caractéristique p [**15**]. Le théorème 1.3 énonce l'existence d'une section pour toute famille de variétés rationnellement connexes (cf. 1.1) sur une courbe lisse, ce qui montre aussi de façon inattendue l'absence de toute obstruction cohomologique à l'existence d'une section, et entre autres l'absence de fibres multiples pour une telle fibration.

Le principal résultat de [**14**] fournit des conditions sur la fibre générale d'un morphisme projectif surjectif $f : X \to B$, où X est muni d'un fibré en droites relativement ample L, et B est une *surface* lisse sur $\mathbb{C}$ (ou n'importe quel corps algébriquement clos de caractéristique 0), garantissant l'existence d'une section rationnelle de f.

THÉORÈME 0.2. — *Si la fibre générale X_b de f satisfait :*

(i) *il existe un entier n tel que la famille $B_{n,x,y}$ paramétrant les « chaînes de n droites libres » joignant x à y dans X_b soit non vide et rationnellement connexe pour x, y généraux dans X_b. De plus, pour un point général $x \in X_b$, la variété des droites de X_b passant par x est rationnellement connexe ;*

(ii) *la variété X_b (polarisée par $L_b = L_{|X_b}$) possède une surface réglée « très tordue »,*

alors f admet une section.

Dans la condition (i), les droites sont dites libres si leur fibré normal dans la fibre X_b est engendré par ses sections globales. Cette condition est automatiquement satisfaite si les fibres X_b sont des variétés homogènes.

On renvoie au paragraphe 2.3 pour un énoncé précis de la condition (ii). Elle dit qu'il existe un morphisme $\phi : \Sigma \to X_b$ où Σ est une surface fibrée en droites sur $\mathbb{P}^1$, c'est-à-dire admet un morphisme $\pi : \Sigma \to \mathbb{P}^1$ dont les fibres Σ_t sont isomorphes à $\mathbb{P}^1$ et satisfont $\deg \phi^* L_{|\Sigma_t} = 1$, tel que le fibré normal du morphisme (ϕ, π) de Σ dans $X_b \times \mathbb{P}^1$ soit suffisamment positif.

Le rôle de la condition (i) dans la démonstration est facile à voir (cf. paragraphe 2.2). La condition (ii) est plus difficile à comprendre (cf. paragraphe 2.3). Néanmoins l'optimalité du théorème de Tsen-Lang (cf. [**11**]) montre qu'il existe des familles d'hypersurfaces cubiques dans $\mathbb{P}^8$ paramétrées par une surface et ne possédant pas de section rationnelle. Or, si X est une hypersurface cubique lisse dans $\mathbb{P}^8$ et x, $y \in X$

deux points généraux, la variété des droites de X passant par x est une variété de Fano (c'est l'intersection complète d'une quadrique et d'une cubique dans $\mathbb{P}^6$), et il n'est pas difficile de montrer que la variété paramétrant les chaînes de deux droites joignant x à y dans X est aussi une variété de Fano. Donc la condition (i) est satisfaite par les hypersurfaces cubiques de $\mathbb{P}^8$ et on conclut que la condition (i) seule n'est pas suffisante pour garantir l'existence de sections.

L'application du théorème 0.2 à la conjecture de Serre est obtenue en montrant que les variétés homogènes $X = G/P$ avec $\rho(X) = 1$ satisfont les conditions (i) et (ii).

Remerciements

Je remercie Jean-Louis Colliot-Thélène, Jason Starr, et Olivier Wittenberg pour leurs commentaires qui m'ont permis d'améliorer une version antérieure de ce texte.

1. EXISTENCE ET NON-EXISTENCE DE SECTIONS RATIONNELLES

1.1. Variétés rationnellement connexes

Les variétés rationnellement connexes ont été introduites par Kollár, Miyaoka et Mori dans [**19**]. On renvoie à [**8**], [**17**] pour plus de détails concernant cette sous-partie. Ces variétés sont caractérisées de la façon suivante :

DÉFINITION 1.1. — *Une variété projective lisse Z définie sur un corps algébriquement clos k est dite rationnellement connexe si pour toute paire de points $x, y \in X(k)$, il existe des morphismes $\phi_i : \mathbb{P}^1 \to X$, $i = 1, \ldots, n$ et des points $p_i, q_i \in \mathbb{P}^1$ tels que $\phi_i(q_i) = \phi_{i+1}(p_{i+1})$, $i = 1, \ldots, n-1$ et $\phi_1(p_1) = x$, $\phi_n(q_n) = y$.*

Remarque 1.2. — En caractéristique 0, il y a d'autres caractérisations des variétés rationnellement connexes (cf. [**8**]), dont l'existence d'une courbe rationnelle $\phi : \mathbb{P}^1 \to X$ très libre, c'est-à-dire telle que $\phi^* T_X$ soit un fibré ample sur $\mathbb{P}^1$. C'est cette dernière définition (dite de connexité rationnelle séparable) qu'il faut adopter en caractéristique non nulle. Comme le théorème principal de l'article [**14**] n'est pas démontré en caractéristique non nulle, ceci n'est pas important pour ce texte.

Les données ci-dessus, modulo les automorphismes fixant p_1 et q_n de la courbe rationnelle obtenue en recollant n copies de $\mathbb{P}^1$ via les identifications $q_i = p_{i+1}$, $i = 1, \ldots, n-1$, forment ce que l'on appelle une « chaîne de courbes rationnelles » joignant x à y. Si la variété Z est munie d'un fibré en droites ample L, et que les morphismes ϕ_i satisfont $\deg \phi_i^* L = d$, on parlera de chaînes de courbes rationnelles