348 ASTÉRISQUE

2012

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2010/2011
EXPOSÉS 1027-1042

(1041) *Le déterminant jacobien*

Petru MIRONESCU

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Séminaire BOURBAKI Juin 2011
63e année, 2010-2011, n° 1041, p. 405 à 424

LE DÉTERMINANT JACOBIEN
[d'après Brezis et Nguyen]

par **Petru MIRONESCU**

1. INTRODUCTION

Récemment, Brezis et Nguyen [**14, 15**] ont décrit les espaces fonctionnels permettant de définir, de manière robuste, la distribution jacobien. Leurs résultats unifient les résultats connus auparavant. Par ailleurs, [**14**] et [**15**] apportent un nouvel éclairage au théorème classique de Reshetnyak sur la compacité faible des jacobiens [**51**]. Dans ces travaux, un rôle important est joué par plusieurs identités faisant intervenir la structure algébrique du jacobien. De ce point de vue, ces travaux s'inscrivent dans une longue série de résultats qui utilisent de manière cruciale la structure particulière du déterminant jacobien. Dans la suite, je présenterai quelques-uns des résultats marquants dans cette direction, des travaux de Morrey [**42**] et Reshetnyak [**51**] à ceux de Brezis et Nguyen [**14**] et [**15**].

2. LE JACOBIEN DES FONCTIONS PEU RÉGULIÈRES

Si $u = (u^1, \ldots, u^n) \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, avec Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$, alors son (déterminant) jacobien est $Ju = \det(\nabla u^1, \ldots, \nabla u^n) = \det(\nabla u) = \det\left[(\partial_k u^i)_{i,k\in[\![1,n]\!]}\right]$ [(1)]. Il est souvent nécessaire de considérer la quantité Ju lorsque u n'est pas C^1. Voici trois exemples.

2.1. Applications à distorsion bornée

Les applications quasiconformes furent introduites par Grötzsch [**26**] en 1928[(2)]. Son point de départ est le suivant : il est impossible de représenter de manière conforme

(1) On utilise la notation $\partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$.
(2) Mais pas le terme quasiconforme. Celui-ci fut proposé par Ahlfors [**1**] en 1935.

un carré C sur un rectangle R qui n'est pas un carré tout en envoyant les sommets sur les sommets. Grötzsch chercha à mesurer la non-conformité (= distorsion) d'une application en considérant une représentation $u : C \to R$ qui fasse se correspondre les sommets et qui soit « la plus conforme » possible. Les applications quasiconformes sont les applications dont la non conformité est finie. En langage moderne, une application quasiconforme est $u : \Omega \to \mathbb{R}^2$ (avec $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ouvert) telle que

1. u est un homéomorphisme ;
2. $u \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ (3) ;
3. $\sup_{|h|\leq 1} |du(h)|^2 \leq K|Ju|$.

Le coefficient $K \geq 1$ mesure la distorsion. Les représentations conformes sont des exemples d'applications quasiconformes. Un autre exemple est $z \mapsto |z|^{\alpha-1}z$, avec $\alpha > 0$. Notons que, dans le cas des applications quasiconformes, parler du jacobien Ju ne pose, *a priori*, pas de problème : on a $Ju \in L^1_{\mathrm{loc}}$, et donc Ju est bien défini comme distribution.

C'est Lavrent'ev [**36**] qui, dans ses travaux sur l'équation de Beltrami $\partial_{\overline{z}} f = \mu \partial_z f$ (dans un ouvert de $\mathbb{R}^2$), considéra des applications à distorsion bornée ; ce sont des généralisations des applications quasiconformes dont nous donnerons la définition plus loin. C'est toujours Lavrent'ev [**37**] qui eut, le premier, l'intuition du rôle important que pouvaient jouer les applications quasiconformes en dimension quelconque. Reshetnyak [**50**] initia l'étude des applications à distorsion bornée (en toute dimension), dont la définition est :

1. u continue ;
2. $u \in W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, avec $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert. Ju est de signe constant p. p. ;
3. $\sup_{|h|\leq 1} |du(h)|^n \leq K|Ju|$.

La monographie de Reshetnyak [**52**] donne un aperçu de la théorie des applications à distorsion bornée. Pour la théorie des applications quasiconformes et ses applications géométriques, voir le grand classique d'Ahlfors [**2**] ou la monographie récente [**21**].

2.2. Élasticité

En mécanique, une déformation est une application $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^3$ injective et qui préserve l'orientation (avec $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ouvert). Sous réserve de régularité suffisante de φ, cette dernière condition s'écrit $J\varphi > 0$. À la place de φ, il est plus commode de travailler avec $u = \varphi - \mathrm{Id}$, qui est le déplacement. Souvent, u est obtenu en minimisant l'énergie associée au problème, et il peut arriver que la régularité de u soit *a priori* trop faible pour définir $J(\mathrm{Id} + \mathrm{u})$ de manière robuste. À titre d'exemple, prenons

(3) $W^{1,p}(\Omega)$ désigne l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \; ; \; du \in L^p(\Omega)\}$. $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ est l'espace obtenu en remplaçant L^p par L^p_{loc}.

une forme simplifiée du système de l'élasticité linéarisée[4]. Dans ce cas, u est obtenu comme solution du problème

$$\inf\left\{\frac{\lambda}{2}\int_\Omega(\operatorname{div} v)^2+\frac{\mu}{4}\sum_{i,k}\int_\Omega(\partial_i v^k+\partial_k v^i)^2-T(v)\ ; v\in W^{1,2}(\Omega), \operatorname{tr} v=0 \text{ sur } \Gamma_0\right\}.$$

Ici, $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ est suffisamment régulier, $\lambda,\mu>0$ sont des constantes élastiques, Γ_0 est une partie de mesure superficielle >0 du $\partial\Omega$, et $T\in H^{-1}(\Omega)$. D'après l'inégalité de Korn [**34, 35**], l'infimum est atteint, mais *a priori* u n'est pas mieux que $W^{1,2}(\Omega)$.

Pour un tel u, quel sens donner à la quantité $J(\mathrm{Id}+\mathrm{u})$? Une première idée est de la regarder comme une quantité définie p. p. Dans ce cas, le jacobien vit dans l'espace $L^{2/3}(\Omega)$, et en particulier il ne s'agit pas d'une distribution. Une autre approche consiste à utiliser une identité qui se trouve dans Morrey [**42**, Lemma 4.4.6], mais était probablement connue avant[5]. Plus spécifiquement, si u est régulière, alors on a :

$$\text{si } n=2\ :\ Ju=\partial_1(u^1\,\partial_2 u^2)-\partial_2(u^1\,\partial_1 u^2)=\frac{1}{2}\partial_1\det(u,\partial_2 u)+\frac{1}{2}\partial_2\det(\partial_1 u,u),$$

et, en toute dimension,

$$Ju=\sum_{k=1}^n\partial_k\left(u^i\,C_i^k\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\partial_k\det(\partial_1 u,\dots,\partial_{k-1}u,u,\partial_{k+1}u,\dots,\partial_n u), \tag{1}$$

où $(C_i^k)_{i,k\in[\![1,n]\!]}$ est la matrice des cofacteurs de la matrice ∇u. De manière équivalente, on a

$$\operatorname{div}\left[(C_i^k)_{k\in[\![1,n]\!]}\right]=\sum_k\partial_k C_i^k=0, \forall\, i\in[\![1,n]\!]. \tag{2}$$

Revenons au cas de l'élasticité linéarisée. Si u est borné[6], alors on peut *définir* la distribution $J(\mathrm{Id}+\mathrm{u})$ à partir de (1) appliquée à $\mathrm{Id}+\mathrm{u}$. Ceci donne bien une distribution, car le membre de droite de (1) appartient à div L^1.

Plus généralement, on peut définir, *via* la formule (1), la distribution Ju si $u\in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)\cap L^q_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, avec $\frac{n-1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Après intégration par parties, la définition revient à

$$Ju(\varphi)=-\sum_{k=1}^n\int_\Omega\det(\partial_1 u,\dots,\partial_{k-1}u,u,\partial_{k+1}u,\dots,\partial_n u)\,\partial_k\varphi,\quad \forall\ \varphi\in C_c^\infty(\Omega). \tag{3}$$

Cas particulier : soit $p_n=\dfrac{n^2}{n+1}$. L'injection de Sobolev $W^{1,p_n}_{\mathrm{loc}}\hookrightarrow L^{n^2}(\Omega)$ permet de définir Ju, *via* (1), pour $u\in W^{1,p_n}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Par exemple, en dimension 2, définir Ju

(4) Ce système est une approximation linéaire du problème de mixte déplacement-traction lorsque le déplacement u est petit.
(5) Le cas $n=2$ était connu par Poincaré [**38**]. Le cas général semble être dû à Kronecker.
(6) Hypothèse raisonnable, car le déplacement u est censé être petit.

comme $\det(\nabla u)$ donne une distribution si $u \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$, alors que (1) permet de descendre jusqu'à $W^{1,4/3}_{\mathrm{loc}}$.

L'utilisation systématique de la formule (1) en élasticité est due à Ball [**4**]. Son article a ouvert de nombreuses voies, et plusieurs résultats dont il sera question plus loin sont directement inspirés par [**4**].

2.3. Cristaux liquides

Un cristal liquide est un état de la matière intermédiaire entre le solide et le fluide isotrope [**25**]. La modélisation mathématique des cristaux liquides fait intervenir les Q-tenseurs [**25**] ; leur analyse est délicate, ce qui explique le succès d'un modèle très simplifié, celui d'Oseen et Frank [**49, 22**]. Selon ce modèle(7), un cristal liquide en équilibre est une application $u : \Omega \to \mathbb{S}^2$ (avec Ω ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^3$) minimisant de l'énergie de Dirichlet $\int_\Omega |\nabla u|^2$ par rapport à sa propre condition aux limites, $g \in C^\infty(\partial\Omega; \mathbb{S}^2)$. D'après un résultat profond de Schoen et Uhlenbeck [**54, 55**], u est régulière sauf en un nombre fini de points $a_1, \dots, a_k$. Brezis, Coron et Lieb [**12**] ont découvert que, si $u \in W^{1,2}(\Omega; \mathbb{S}^2)$ est régulière sauf en un nombre fini de points, alors son jacobien, défini par (1), « entend » les singularités de u : $Ju = \frac{4\pi}{3} \sum d_j \delta_{a_j}$. Ici, la somme se fait sur les singularités a_j de u, et l'entier d_j est le degré topologique de u sur une petite sphère autour de a_j (8). Dans le cas particulier où $u(x) = \dfrac{x}{|x|}$, ceci avait été remarqué par Ball [**4**]. Par ailleurs, le déterminant $\det(\nabla u)$ vaut 0 presque partout (en fait, en dehors des singularités), et donc n'entend rien(9). Raison de plus de considérer que le bon jacobien est donné par (1) !

3. COMPACITÉ

On doit à Reshetnyak [**51**] ce surprenant résultat.

THÉORÈME 3.1. — *Soit $(u_j) \subset W^{1,n}(\Omega)$, avec Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$. Si $u_j \rightharpoonup u$, alors $Ju_j \to Ju$ au sens des distributions.*

Notons que la convergence est due à la structure spéciale du jacobien ; elle n'a pas lieu pour un terme de la forme $\partial_1 u_j^1 \dots \partial_n u_j^n$ (10).

(7) Dans sa forme la plus simple : approximation à une constante élastique et condition d'ancrage.

(8) Par un argument d'homotopie, d_j ne dépend pas de la sphère.

(9) Preuve : si $u \in C^\infty$ au voisinage de x, alors les dérivées $\partial_j u(x)$ sont orthogonales à $u(x)$, ce qui s'obtient en dérivant la relation $|u|^2 \equiv 1$. Il s'ensuit que ces dérivées ne sont pas indépendantes. On obtient $\det(\nabla u) = 0$ p. p. On se servira de ce fait dans la section 5.

(10) Prendre $n = 2$, $u_j(x_1, x_2) = \dfrac{1}{j}(\sin(jx_1)\cos(jx_2), \cos(jx_2)\sin(jx_1))$.