352

ASTÉRISQUE

2013

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2011/2012
EXPOSÉS 1043-1058

50) *Théorie de Hodge et correspondance de Hitchin-Kobaya*
sauvages

Claude SABBAH

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Séminaire BOURBAKI Janvier 2012
64e année, 2011-2012, n° 1050, p. 205 à 241

THÉORIE DE HODGE ET CORRESPONDANCE DE HITCHIN-KOBAYASHI SAUVAGES [d'après T. Mochizuki]

par **Claude SABBAH**

INTRODUCTION : LE THÉORÈME DE LEFSCHETZ DIFFICILE

Les $\mathscr{D}$-modules holonomes simples. — Soient Z^o une variété quasi-projective lisse complexe irréductible et (V,∇) un fibré vectoriel algébrique muni d'une connexion intégrable (i.e., sans courbure), sans sous-fibré propre stable par la connexion (i.e., simple). C'est le type d'objet auquel on s'intéresse dans cet exposé. Choisissons une compactification projective $j : Z^o \hookrightarrow Z$ et un plongement de Z dans une variété projective lisse X. Il est connu qu'un tel (V,∇) se prolonge de manière unique en un $\mathscr{D}_X$-module (i.e., $\mathscr{O}_X$-module avec connexion intégrable ∇) holonome simple à support dans Z et qu'on obtient ainsi tous les $\mathscr{D}_X$-modules holonomes simples à support dans Z, lisses sur Z^o.

Pour un tel $\mathscr{D}_X$-module $\mathscr{M}$, le complexe de de Rham analytique

$$\mathrm{DR}\,\mathscr{M} := (\Omega^{\bullet+\dim X}_{X^{\mathrm{an}}} \otimes \mathscr{M}, \nabla)$$

est à cohomologie $\mathbb{C}$-constructible, d'après un théorème de Kashiwara. Plus précisément, c'est un *faisceau pervers*.

Quels sont les faisceaux pervers qu'on obtient de cette manière ? On ne connaît pas la réponse à cette question. Néanmoins, on sait [**35, 48, 49**] que la correspondance de Riemann-Hilbert $\mathscr{M} \mapsto \mathrm{DR}\,\mathscr{M}$ est une équivalence entre la catégorie des $\mathscr{D}_X$-modules holonomes réguliers (analytiques) et celle des faisceaux pervers. Ceci, joint au théorème GAGA pour les modules holonomes réguliers [**38**], implique que tout *faisceau pervers simple* est obtenu de cette manière. D'après [**2**] et [**24**], un tel faisceau pervers n'est autre (au décalage par $\dim Z$ près) que le complexe d'intersection $\mathrm{IC}_Z(\mathscr{L})$

(*) Cette recherche a été effectuée dans le cadre du programme ANR-08-BLAN-0317-01 de l'Agence nationale de la recherche.

de Goresky-MacPherson (extension intermédiaire $j_{!*}\mathscr{L}$) associé à un faisceau localement constant irréductible $\mathscr{L}$ sur Z^o (i.e., une représentation linéaire irréductible de $\pi_1(Z^o,\star)$).

Il est par ailleurs facile d'obtenir des complexes $\mathrm{DR}\,\mathscr{M}$ qui ne sont pas des faisceaux pervers simples, ni même semi-simples (i.e., sommes directes d'objets simples), si on accepte que $\mathscr{M}$ simple ait des singularités irrégulières. Une façon d'obtenir de tels exemples consiste à utiliser la transformation de Fourier.

Exemple. — Soient $T_1,\dots,T_r$ ($r\geqslant 2$) des éléments de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ ($n\geqslant 2$) dont le produit est égal à l'identité et qui n'ont pas de vecteur propre commun. Supposons aussi que 1 ne soit pas valeur propre des T_i (multiplier chaque T_i par $\lambda_i\in\mathbb{C}^*$ assez général, en faisant en sorte que $\prod\lambda_i=1$). Ils définissent une représentation irréductible du groupe fondamental de $\mathbb{P}^1$ privé de r points, tous à distance finie, donc un faisceau localement constant irréductible de rang n sur cet espace. Son complexe d'intersection sur $\mathbb{A}^1$ (coordonnée z) correspond à un module holonome M sur l'algèbre de Weyl $\mathbb{C}[z]\langle\partial_z\rangle$, dont toutes les singularités sont régulières.

Le transformé de Fourier ${}^F\!M$ est M lui-même sur lequel on voit ∂_z opérer comme la multiplication par une variable ζ et $-z$ comme la dérivation ∂_ζ. Si M est simple, ${}^F\!M$ l'est aussi, mais on peut montrer (voir par exemple [**46**]) que ce dernier a une singularité irrégulière en $\zeta=\infty$, une singularité régulière en $\zeta=0$, et pas d'autre singularité. On peut aussi montrer que les hypothèses faites sur les T_i impliquent que, sur l'ouvert $\zeta\neq 0$, le faisceau localement constant de ses sections horizontales est de rang égal à nr, et sa monodromie a pour seule valeur propre 1, avec r blocs de Jordan de taille 2 et $(n-2)r$ blocs de taille 1. Ce faisceau localement constant n'est donc pas semi-simple.

Soit ${}^F\!\mathscr{M}$ l'unique $\mathscr{D}_{\mathbb{P}^1}$-module holonome simple dont la restriction à $\mathbb{A}^1$ (coordonnée ζ) est ${}^F\!M$. Si $\mathrm{DR}\,{}^F\!\mathscr{M}$ était pervers semi-simple, il serait somme directe de faisceaux à support ponctuel et de complexes d'intersection de faisceaux localement constants irréductibles (à un décalage près), parmi lesquels le faisceau localement constant ci-dessus, d'où une contradiction.

Nous allons voir cependant que les faisceaux pervers $\mathrm{DR}\,\mathscr{M}$, pour $\mathscr{M}$ simple, satisfont tous au théorème de Lefschetz difficile. Dans la suite, nous travaillerons dans le cadre analytique complexe uniquement, contrairement au début de cette introduction.

Le théorème de Lefschetz difficile. — Dans différents exposés en 1996 (voir [**37**]), Kashiwara a conjecturé une version très générale du théorème de Lefschetz difficile en géométrie algébrique complexe, qui a été démontrée récemment par T. Mochizuki [**55**] :

THÉORÈME 0.1. — *Soit X une variété algébrique projective complexe lisse et soit L l'opérateur de cup-produit par la classe de Chern d'un fibré en droites ample sur X.*

Alors, pour tout $\mathcal{D}_X$-module holonome simple $\mathcal{M}$ sur X et tout $k \geqslant 1$, l'itéré k-ième $L^k : \boldsymbol{H}^{-k}(X, \mathrm{DR}\,\mathcal{M}) \to \boldsymbol{H}^k(X, \mathrm{DR}\,\mathcal{M})$ est un isomorphisme.

Remarque 0.2. — Avec le décalage définissant DR, $\boldsymbol{H}^k$ peut être non nul seulement pour $k \in [-\dim X, \dim X]$. De plus, pour $\mathcal{M}$ simple et différent de la connexion triviale $(\mathcal{O}_X, \mathrm{d})$, on a aussi nullité pour $k = -\dim X, \dim X$. En effet, considérons d'abord le complexe $\Gamma(X, \mathrm{DR}\,\mathcal{M})$: son $H^{-\dim X}$ est l'espace des sections de $\mathcal{M}$ sur X annulées par ∇ ; il y a donc un sous-module $H^{-\dim X} \otimes (\mathcal{O}_X, \mathrm{d})$ contenu dans $\mathcal{M}$, et l'hypothèse « $\mathcal{M}$ simple et $\neq (\mathcal{O}_X, \mathrm{d})$ » implique $H^{-\dim X} = 0$. La suite spectrale d'hypercohomologie montre que $\boldsymbol{H}^{-\dim X} \subset H^{-\dim X}$, d'où la nullité de $\boldsymbol{H}^{-\dim X}$. Un argument de dualité permet aussi d'en déduire $\boldsymbol{H}^{\dim X} = 0$. Ainsi, l'énoncé 0.1 est de peu d'intérêt lorsque X est une courbe.

Pour obtenir un théorème de ce type, on montre d'abord l'existence d'une structure plus riche, qui fait apparaître une notion de pureté [**18**]. La théorie de Hodge joue ce rôle en géométrie algébrique complexe « modérée » (voir l'excellent panorama [**16**]) :

a. Si (V, ∇) est un fibré holomorphe à connexion intégrable sur X, le complexe $\mathrm{DR}(V, \nabla) = (\Omega_X^{\bullet + \dim X} \otimes V, \nabla)$ n'a de cohomologie qu'en degré $-\dim X$, c'est le système local V^∇ des sections horizontales de ∇ (théorème de Cauchy-Kowalewski et lemme de Poincaré holomorphe) ; (a$'$) si de plus (V, ∇) sous-tend *une variation de $\mathbb{Q}$-structure de Hodge polarisable*, le théorème de Lefschetz difficile $L^k : H^{\dim X - k}(X, V^\nabla) \xrightarrow{\sim} H^{\dim X + k}(X, V^\nabla)$ a été montré par Deligne (voir [**79**, Th. 2.9]), le théorème de Lefschetz difficile proprement dit, démontré par Hodge (voir [**28**]) étant le cas $(V, \nabla) = (\mathcal{O}_X, d)$.
b. L'extension de ce résultat au cas où (V, ∇) est un fibré holomorphe à connexion intégrable sur le complémentaire X^o d'une hypersurface D de X et satisfait (a$'$) a fait l'objet de nombreux travaux ([**71, 79, 8, 9, 10, 36, 39**]), aboutissant au théorème de Lefschetz difficile pour la cohomologie d'intersection sur X du système local V^∇, lorsque $D = X \smallsetminus X^o$ est un diviseur à croisements normaux.
c. M. Saito [**69**] a supprimé l'hypothèse X lisse et D à croisements normaux en introduisant la catégorie des $\mathcal{D}$-modules de Hodge polarisables. Le théorème 0.1 s'applique aux complexes $\mathrm{DR}\,\mathcal{M} = \mathrm{IC}_Z(\mathcal{L})[\dim Z]$ pourvu que $\mathcal{L}$ sous-tende une variation de $\mathbb{Q}$-structure de Hodge polarisable (voir aussi [**2, 15, 16**] pour d'autres approches dans le cas des systèmes locaux d'origine géométrique).

Dans (b) et (c), on travaille avec le prolongement de Deligne de (V, ∇), qui est à singularité régulière à l'infini (i.e., le long de D), et ce comportement « modéré » est nécessaire *a priori* pour appliquer les méthodes de la théorie de Hodge, d'après le théorème de régularité de Griffiths-Schmid [**71**, Th. 4.13]). Par contre, la notion de *variation de structure de twisteur polarisée*, introduite par Simpson [**75**] autorise des singularités irrégulières à l'infini, et permet d'aborder, par une théorie de Hodge « sauvage », le théorème 0.1 pour les $\mathscr{D}$-modules holonomes simples à singularités éventuellement irrégulières.

Cette notion de variation de structure de twisteur polarisée intervient déjà en l'absence de singularité (sous la forme d'une *métrique harmonique*, voir le dictionnaire du § 1). Pour une variation de structure de Hodge polarisée, c'est la structure qui reste lorsqu'on ne garde que la connexion plate et la métrique hermitienne de polarisation. Sous la seule hypothèse de semi-simplicité de (V, ∇) ou, de manière équivalente, du faisceau localement constant V^∇, le cas lisse (a) du théorème 0.1 provient de l'existence, due à Corlette **[13]**, d'une métrique dite *harmonique* pour (V, ∇) (le cas où (V, ∇) est unitaire ou, plus généralement, une variation de structure de Hodge polarisée, en étant un cas très particulier). On peut en effet développer dans ce cadre la théorie harmonique du laplacien et obtenir les identités de Kähler, qui conduisent au théorème 0.1 (voir **[74]**). Il faut noter que l'hypothèse de semi-simplicité de V^∇ est importante, et il est facile de donner un exemple où 0.1 est en défaut sans cette hypothèse : sur une courbe de genre $g \geqslant 2$, toute extension non triviale $\mathscr{L}$ du faisceau constant $\mathbb{C}$ par un système local non constant de rang 1 satisfait à $\dim H^0(X, \mathscr{L}) \neq \dim H^2(X, \mathscr{L})$.

Nonobstant la remarque 0.2, Simpson **[73]** a montré, dans le cas où X est une courbe, l'existence d'une métrique harmonique h pour (V, ∇) sur $X^o \subset X$, avec un comportement modéré aux points de D (voir aussi **[3, 34]** en dimension $\geqslant 1$). L'analyse asymptotique qu'il fait de cette métrique au voisinage de D prolonge à ce cadre celle faite par Schmid **[71]** dans le cas des variations de structures de Hodge polarisées, ce qui permet notamment de calculer la cohomologie d'intersection $H^1(X, j_* V^\nabla)$ $(j : X^o \hookrightarrow X)$ comme un espace de cohomologie L^2 relativement à h et à une métrique de type Poincaré sur X^o, et qui prolonge les résultats de Zucker **[79]** (**[4]**, voir aussi **[64]**, § 6.2], [**52**, § 20.2], [**33**]). Ceci aboutit à un énoncé analogue à la dégénérescence en E_1 de la suite spectrale Hodge $\Rightarrow$ de Rham, à savoir le calcul de $\dim H^1(X, j_* V^\nabla)$ en terme de la cohomologie de Dolbeault du fibré de Higgs parabolique associé.

Le cas « modéré » du théorème 0.1 est celui où le $\mathscr{D}_X$-module $\mathscr{M}$ est à singularités régulières, i.e., $\mathrm{DR}\,\mathscr{M} = \mathrm{IC}_Z(\mathscr{L})[\dim Z]$ avec Z irréductible et $\mathscr{L}$ simple sur Z^o. T. Mochizuki a résolu ce cas dans **[52]** en étendant les méthodes évoquées ci-dessus. La stratégie de la démonstration, qui vaut aussi pour le cas « sauvage », c'est-à-dire lorsque $\mathscr{M}$ est à singularités irrégulières, sera expliquée au § 2. Le cas modéré a aussi été résolu par Drinfeld **[22]** par une méthode de réduction à la caractéristique p réminiscente de **[2]**. Drinfeld s'appuyait cependant sur une conjecture faite par de Jong **[32]**, démontrée depuis **[6, 23]**.

Récemment, Krämer et Weissauer **[43]** ont utilisé le cas modéré de 0.1 pour montrer un théorème d'annulation, pour tout faisceau pervers $\mathscr{F}$ sur une variété abélienne