Séminaire BOURBAKI Juin 2013
65e année, 2012-2013, n° 1073, p. 415 à 457

LA CONJECTURE DE BLOCH-KATO
[d'après M. Rost et V. Voevodsky]

par **Joël RIOU**

Définition 0.1. — *Pour tout corps commutatif k, on note $K^M_\star(k)$ le quotient de l'algèbre tensorielle sur $\mathbf{Z}$ du groupe abélien $k^\times$ par l'idéal bilatère engendré par les éléments $x \otimes (1-x)$ pour $x \in k - \{0,1\}$. L'image de $x_1 \otimes \cdots \otimes x_q$ dans $K^M_q(k)$ est le symbole noté $\{x_1, \ldots, x_q\}$. L'algèbre $K^M_\star(k)$ est l'algèbre de K-théorie de Milnor du corps k. C'est une algèbre commutative au sens gradué (cf.* [29, Lemma 1.1]*).*

Soit $m \geq 1$. Soit k un corps dans lequel m est inversible. Soit $x \in k^\times$. Considérons le sous-schéma $\operatorname{Spec} k[T, T^{-1}]/(T^m - x)$ du groupe multiplicatif $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$. C'est un torseur étale sous l'action du schéma en groupes μ_m des racines m-ièmes de l'unité. Il possède donc une classe (x) dans le groupe de cohomologie étale $H^1_{\text{ét}}(k, \mu_m)$. D'après la théorie de Kummer, le morphisme ainsi défini $k^\times/k^{\times m} \to H^1_{\text{ét}}(k, \mu_m)$ est un isomorphisme. Tate a montré que $(x) \cup (1-x) = 0 \in H^2_{\text{ét}}(k, \mu_m^{\otimes 2})$ pour tout $x \in k - \{0,1\}$ (cf. [15, Lemme 1]). On en déduit un morphisme de $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$-algèbres $\oplus_q K^M_q(k)/mK^M_q(k) \to \oplus_q H^q_{\text{ét}}(k, \mu_m^{\otimes q})$.

Conjecture 0.2 (Bloch-Kato [5, §3]). — *Soit $m \geq 1$. Soit k un corps dans lequel l'entier m est inversible. Pour tout entier $q \geq 0$, le morphisme canonique*

$$K^M_q(k)/mK^M_q(k) \to H^q_{\text{ét}}(k, \mu_m^{\otimes q})$$

est un isomorphisme.

Le théorème de Merkurjev-Suslin (cas où $q = 2$) a été un des premiers résultats importants sur cette conjecture (cf. [28] et [10]). L'énoncé pour m une puissance de 2 et un poids q arbitraire est la conjecture de Milnor [29, §6], démontrée par Voevodsky (cf. [15] et [38]). La conjecture a été formulée pour la première fois par Kato dans [19, Conjecture 1, §1.1]. Bloch a également conjecturé la surjectivité de l'application de l'énoncé dans le cas des corps contenant un corps algébriquement clos [4, page 5.12]. Ensemble, Bloch et Kato ont obtenu le cas où m est une puissance d'un nombre premier p et k un corps de valuation discrète hensélien de caractéristique zéro dont le corps résiduel est de caractéristique p (cf. [5, Theorem 5.12]).

Le but de cet exposé est de donner des indications sur la démonstration de la conjecture 0.2 par M. Rost et V. Voevodsky. Leurs contributions principales [33] et [42] s'imbriquent dans un raisonnement par récurrence sur le poids q. L'esquisse de la démonstration occupe les §1–7. Quelques applications de la conjecture sont données dans le §8.

Je voudrais remercier Frédéric Déglise et Bruno Kahn pour leur relecture attentive d'une version préliminaire de ce texte, ainsi que Jean-Louis Colliot-Thélène et Alena Pirutka pour leurs suggestions à propos du §8.

1. REFORMULATIONS MOTIVIQUES

La démonstration de la conjecture de Bloch-Kato par Voevodsky et Rost utilise de façon essentielle la cohomologie motivique. Le formalisme des motifs de Voevodsky a été évoqué dans l'exposé de Friedlander [7] et est développé dans les livres [43] et [27]. On se contentera ici de donner une définition de la cohomologie motivique et d'énoncer les propriétés nécessaires pour formuler le théorème 1.23 qui réduit la démonstration de la conjecture de Bloch-Kato à un énoncé d'annulation (conjecture 1.22). Une présentation alternative de ces résultats se trouve dans l'exposé de Kahn [15] sur la conjecture de Milnor.

On fixe un corps de base parfait k.

Définition 1.1. — *On note Sm/k la catégorie des k-schémas lisses et quasi-projectifs. Si X et Y sont deux objets de Sm/k, une correspondance finie $X \rightsquigarrow Y$ est un élément du groupe abélien libre dont les générateurs sont les sous-schémas fermés intègres Z de $X \times_k Y$ tels que le morphisme composé $Z \to X$ soit fini et admette pour image (ensembliste) une composante connexe de X. On peut définir une catégorie $SmCor/k$ ayant les mêmes objets que Sm/k et dont les morphismes soient les correspondances finies.*

Après inversion de l'exposant caractéristique, on peut décrire les correspondances finies comme des différences formelles entre « applications multivaluées » :

Proposition 1.2 ([34, Theorem 6.8]). — *Si $Y \in Sm/k$, on peut considérer pour tout $n \geq 0$ le k-schéma $\operatorname{Sym}^n Y := Y^n/\mathfrak{S}_n$ où le quotient par le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ est celui de SGA 1 V 2. Le k-schéma $\operatorname{Sym}^\infty Y := \coprod_{n\geq 0} \operatorname{Sym}^n Y$ est un k-schéma en monoïdes (commutatif). Pour tout $X \in Sm/k$, l'ensemble $\operatorname{Hom}_k(X, \operatorname{Sym}^\infty Y)$ est donc un monoïde dont on peut noter $\operatorname{Hom}_k(X, \operatorname{Sym}^\infty Y)^+$ le complété en groupe. Si on note p l'exposant caractéristique de k, on dispose d'un isomorphisme canonique*

$$\operatorname{Hom}_{SmCor/k}(X,Y) \otimes \mathbf{Z}[1/p] \simeq \operatorname{Hom}_k(X, \operatorname{Sym}^\infty Y)^+ \otimes \mathbf{Z}[1/p] \ .$$

Définition 1.3. —*Soit $X \in Sm/k$. On note $\mathbf{Z}_{tr}(X)$ le préfaisceau de groupes abéliens sur Sm/k défini par $\mathbf{Z}_{tr}(X)(U) := \operatorname{Hom}_{SmCor/k}(U, X)$.*

Définition 1.4. — *Soit $n \geq 0$. On note $\mathbf{\Delta}^n := \operatorname{Spec} \mathbf{Z}[X_0, X_1, \dots, X_n]/(\sum_{i=0}^n X_i - 1)$. Pour $n, n' \geq 0$, toute application $f\colon \{0, \dots, n\} \to \{0, \dots, n'\}$ induit naturellement un morphisme $f_\star\colon \mathbf{\Delta}^n \to \mathbf{\Delta}^{n'}$. (En particulier, $\mathbf{\Delta}^\bullet := (n \longmapsto \mathbf{\Delta}^n)$ est un objet cosimplicial dans la catégorie des schémas.)*

Bien sûr, pour tout $n \geq 0$, on a un isomorphisme (non canonique) $\mathbf{\Delta}^n \simeq \mathbf{A}^n$.

Définition 1.5. — *Soit $\mathcal{F}$ un préfaisceau de groupes abéliens sur Sm/k. On note $C_\star \mathcal{F}$ le complexe de préfaisceaux de groupes abéliens sur Sm/k tel que pour tout $U \in Sm/k$ et $n \in \mathbf{N}$, $(C_n \mathcal{F})(U) := \mathcal{F}(U \times \mathbf{\Delta}^n)$, et que la différentielle $\mathcal{F}(U \times \mathbf{\Delta}^n) \to \mathcal{F}(U \times \mathbf{\Delta}^{n-1})$ soit donnée par la somme alternée $\sum_{i=0}^n (-1)^i d_i^\star$ des $n+1$ faces $d_i\colon \mathbf{\Delta}^{n-1} \to \mathbf{\Delta}^n$:*

$$\cdots \to \mathcal{F}(U \times \mathbf{\Delta}^2) \xrightarrow{d_0^\star - d_1^\star + d_2^\star} \mathcal{F}(U \times \mathbf{\Delta}^1) \xrightarrow{d_0^\star - d_1^\star} \mathcal{F}(U) \to 0 \to \dots$$

Définition 1.6. — *Pour tout $q \geq 0$, on note $\widetilde{\mathbf{Z}_{tr}} \mathbf{G}_m^{\wedge q}$ le faisceau abélien sur Sm/k pour la topologie de Zariski quotient de $\mathbf{Z}_{tr}(\mathbf{G}_m^q)$ par le sous-faisceau engendré par les images des q morphismes $\mathbf{Z}_{tr}(\mathbf{G}_m^{q-1}) \to \mathbf{Z}_{tr}(\mathbf{G}_m^q)$ induits par les inclusions $i_s\colon \mathbf{G}_m^{q-1} \to \mathbf{G}_m^q$ pour $1 \leq s \leq q$ définies par $i_s(x_1, \dots, x_{q-1}) = (x_1, \dots, x_{s-1}, 1, x_s, \dots, x_{q-1})$.*

Définition 1.7. — *Pour tout $q \geq 0$, $\mathbf{Z}(q)$ est le complexe de faisceaux sur Sm/k pour la topologie de Zariski défini par la formule*

$$\mathbf{Z}(q) := C_\star \widetilde{\mathbf{Z}_{tr}} \mathbf{G}_m^{\wedge q}[-q] \ .$$

Pour $q < 0$, on pose $\mathbf{Z}(q) := 0$. On pourra considérer $\mathbf{Z}(q)$ comme un objet de la catégorie dérivée $\mathrm{D}(Sm/k_{Zar})$ des faisceaux de groupes abéliens sur le grand site Sm/k_{Zar} constitué de la catégorie Sm/k munie de la topologie de Zariski.

Définition 1.8. — *Pour tous $X \in Sm/k$, $(p, q) \in \mathbf{Z}^2$ et tout groupe abélien A, le groupe de cohomologie motivique $H^{p,q}(X, A)$, aussi noté $H^p(X, A(q))$, est le groupe d'hypercohomologie $\mathbf{H}^p_{Zar}(X, A(q))$ où $A(q) := \mathbf{Z}(q) \otimes A$. L'hypercohomologie est prise ici pour la topologie de Zariski ; il reviendrait au même de considérer la topologie de Nisnevich (cf.* [22] *où elle est appelée « topologie hensélienne »).*

Théorème 1.9 ([37]). — *Soit $X \in Sm/k$. Les groupes de cohomologie motivique de X sont isomorphes aux groupes de Chow supérieurs définis par Bloch, c'est-à-dire que pour tout $(p, q) \in \mathbf{Z}^2$, on a un isomorphisme :*

$$H^p(X, \mathbf{Z}(q)) \simeq CH^q(X, 2q - p) \ .$$

En particulier, pour tout $q \in \mathbf{Z}$, $H^{2q}(X, \mathbf{Z}(q)) \simeq CH^q(X)$.

Corollaire 1.10. — *Soit $X \in Sm/k$. Pour $(p,q) \in \mathbf{Z}^2$, le groupe $H^p(X,\mathbf{Z}(q))$ est nul dans les cas suivants :*

(a) $q < 0$;

(b) $p > 2q$;

(c) $p > q + \dim X$.

Seul (b) est un corollaire du théorème 1.9. L'énoncé (a) résulte de la définition et (c) de la borne sur la dimension cohomologique Zariski de X due à Grothendieck.

Théorème 1.11 ([43, Corollary 3.4.3, Chapter V]). —*Il existe des isomorphismes canoniques dans $\mathrm{D}(Sm/k_{Zar})$:*

$$\mathbf{Z}(0) \simeq \mathbf{Z}\ , \qquad \mathbf{Z}(1) \simeq \mathbf{G}_m[-1]\ ,$$

où $\mathbf{Z}$ est le faisceau constant. Ainsi, si $X \in Sm/k$, $H^0(X,\mathbf{Z}(0)) \simeq \mathbf{Z}^{\pi_0(X)}$ et c'est le seul groupe de cohomologie motivique de poids 0 qui puisse être non nul. En poids 1, les seuls groupes qui puissent être non nuls sont $H^1(X,\mathbf{Z}(1)) \simeq \Gamma(X,\mathcal{O}_X^\times)$ et $H^2(X,\mathbf{Z}(1)) \simeq \mathrm{Pic}(X)$.

Si $X \in Sm/k$ est une variété intègre dont on note K le corps des fonctions rationnelles, on peut définir les groupes de cohomologie motivique $H^p(K,A(q))$ de K en prenant la limite inductive des groupes $H^p(U,A(q))$ où U parcourt l'ensemble ordonné des ouverts non vides de X. Cette définition ne dépend que de K et par passage à la limite inductive on peut définir la cohomologie motivique de toute extension K de k. Le choix du sous-corps parfait k n'ayant aucune influence, les groupes obtenus ne dépendent véritablement que du corps K.

Proposition 1.12 ([27, Lecture 5]). — *Soit L un corps. Il existe un isomorphisme canonique pour tout $q \in \mathbf{N}$:*

$$K_q^M(L) \simeq H^q(L,\mathbf{Z}(q))\ .$$

Pour tout $m \geq 1$, cet isomorphisme induit un isomorphisme $K_q^M(L)/mK_q^M(L) \simeq H^q(L,\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}(q))$.

On va se contenter ici d'expliquer en quoi il est plausible que ces deux groupes soient liés. Pour simplifier les notations, on suppose que $L = k$. Par définition, $H^q(k,\mathbf{Z}(q)) = \mathbf{H}^0_{\mathrm{Zar}}(\operatorname{Spec} k, C_\star\widetilde{\mathbf{Z}_{\mathrm{tr}}\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^{\wedge q}})$. Le corps k étant un anneau local, l'hypercohomologie Zariski se calcule trivialement et

$$H^q(k,\mathbf{Z}(q)) \simeq \operatorname{coker}(\widetilde{\mathbf{Z}_{\mathrm{tr}}}\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^{\wedge q}((\operatorname{Spec} k)\times\mathbf{\Delta}^1) \overset{d_0^\star - d_1^\star}{\longrightarrow} \widetilde{\mathbf{Z}_{\mathrm{tr}}}\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^{\wedge q}(\operatorname{Spec} k))\ .$$

Le groupe $H^q(k,\mathbf{Z}(q))$ est donc un quotient de $\mathbf{Z}_{\mathrm{tr}}\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^q(\operatorname{Spec} k) = \operatorname{Hom}_{SmCor/k}(\operatorname{Spec} k, \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^q)$ qui s'identifie au groupe abélien libre sur l'ensemble des points fermés du k-schéma $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^q$. Si $y \in \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^q$ est un point fermé, le corps résiduel $k(y)$ est une extension finie de k et y correspond à un q-uplet $(y_1,\dots,y_q)$ d'éléments de $k(y)^\times$; on peut associer un élément de $K_q^M(k)$ à y en considérant l'image du symbole $\{y_1,\dots,y_q\}$

par le morphisme de norme $N_{k(y)/k}\colon K_q^M(k(y)) \to K_q^M(k)$ (dont la construction n'a rien d'évident, cf. [3] et [20, §1.7]). On peut montrer que cette construction induit un morphisme $H^q(k, \mathbf{Z}(q)) \to K_q^M(k)$ qui est un isomorphisme.

Définition 1.13. — *On note* $\mathrm{D}(Sm/k_{\acute{e}t})$ *la catégorie dérivée des faisceaux de groupes abéliens sur le grand site étale* $Sm/k_{\acute{e}t}$. *Le foncteur « faisceau étale associé » induit un foncteur* $\alpha^\star\colon \mathrm{D}(Sm/k_{Zar}) \to \mathrm{D}(Sm/k_{\acute{e}t})$.

Théorème 1.14 ([43, Proposition 3.3.3, Chapter V]). — *Soit* $q \in \mathbf{N}$. *Soit* A *un groupe abélien de torsion première à l'exposant caractéristique de* k. *L'image du complexe motivique* $A(q)$ *dans la catégorie dérivée des faisceaux étales sur* Sm/k *s'identifie au faisceau constant tordu* $A(q)$. *En particulier, si* $A = \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$, *l'image de* $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}(q)$ *dans la catégorie dérivée des faisceaux étales sur* Sm/k *est* $\mu_m^{\otimes q}$.

Définition 1.15. — *Pour tous* $X \in Sm/k$, $p \in \mathbf{Z}$, $q \in \mathbf{N}$ *et tout groupe abélien* A, *on définit le groupe de cohomologie motivique étale* $H^{p,q}_{\text{ét}}(X, A)$ *comme étant le groupe d'hypercohomologie étale* $\mathbf{H}^p_{\text{ét}}(X, A(q))$. *Ces groupes sont aussi notés* $H^p_{\text{ét}}(X, A(q))$ *(cette notation n'induit pas véritablement de confusion d'après le théorème 1.14).*

Tautologiquement, on dispose d'un morphisme de la cohomologie motivique vers la cohomologie motivique étale pour tous $X \in Sm/k$, $p \in \mathbf{Z}$ et $q \in \mathbf{N}$:

$$H^{p,q}(X, A) \to H^{p,q}_{\text{ét}}(X, A)\,. \tag{1}$$

D'après la proposition 1.12 et le théorème 1.14, dans le cas où $X = \operatorname{Spec} k$, $A = \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ et $p = q$, ce morphisme s'identifie au morphisme considéré dans l'énoncé de la conjecture 0.2 :

$$K_q^M(k)/mK_q^M(k) \to H^q_{\text{ét}}(k, \mu_m^{\otimes q})\ .$$

Il faut donc considérer la conjecture de Bloch-Kato comme signifiant qu'en certains degrés la cohomologie motivique coïncide avec la cohomologie motivique étale. Nous allons maintenant préciser comment ce principe peut se généraliser.

Le foncteur $\alpha^\star\colon \mathrm{D}(Sm/k_{\mathrm{Zar}}) \to \mathrm{D}(Sm/k_{\text{ét}})$ admet un foncteur adjoint à droite $R\alpha_\star\colon \mathrm{D}(Sm/k_{\text{ét}}) \to \mathrm{D}(Sm/k_{\mathrm{Zar}})$. Sa vertu est que si $K \in \mathrm{D}(Sm/k_{\text{ét}})$, alors pour tout $X \in Sm/k$ et $p \in \mathbf{Z}$, $H^p_{\mathrm{Zar}}(X, R\alpha_\star K) \simeq H^p_{\text{ét}}(X, K)$. Le morphisme (1) peut s'interpréter comme étant déduit du morphisme d'adjonction $A(q) \to R\alpha_\star\alpha^\star A(q)$ par application du foncteur $H^p_{\mathrm{Zar}}(X, -)$. Par construction, pour tout $q \in \mathbf{N}$, le complexe $A(q)$ réside en degrés cohomologiques $\leq q$. Par conséquent, le morphisme $A(q) \to R\alpha_\star\alpha^\star A(q)$ se factorise par la troncature $\tau_{\leq q} R\alpha_\star\alpha^\star A(q)$ de $R\alpha_\star\alpha^\star A(q)$. Pour tout complexe $K \in \mathrm{D}(Sm/k_{\mathrm{Zar}})$ et $q \in \mathbf{Z}$, on dispose en effet d'un triangle distingué canonique

$$\tau_{\leq q} K \to K \to \tau_{\geq q+1} K \to \tau_{\leq q} K[1]$$

tel que les faisceaux de cohomologie de $\tau_{\leq q} K$ soient nuls en degrés $> q$ et canoniquement isomorphes à ceux de K en degrés $\leq q$.