Bull. Soc. Math. France
147 (4), 2019, p. 705-748

POINTS ALGÉBRIQUES DE HAUTEUR BORNÉE SUR UNE SURFACE

PAR CÉCILE LE RUDULIER

RÉSUMÉ. — Nous étudions dans cet article le problème du comptage du nombre de points algébriques, de degré donné m et de hauteur bornée, sur une surface X définie sur un corps de nombres et le relions à la conjecture de Batyrev-Manin-Peyre, concernant les points rationnels de hauteur bornée, sur le schéma de Hilbert de m points sur X. Nous montrons alors que ces schémas de Hilbert ponctuels fournissent, sous certaines conditions, de nouveaux contre-exemples à la conjecture de Batyrev-Manin-Peyre et étudions plus précisément les cas des points quadratiques sur $\mathbf{Q}$ des surfaces $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ et $\mathbf{P}^2$. Dans ces deux cas, nous montrons que le schéma de Hilbert associé vérifie néanmoins une version légèrement affaiblie de la conjecture.

ABSTRACT (*Algebraic points of bounded height on a surface*). — In this article, we study the asymptotic cardinality of the set of algebraic points of fixed degree and bounded height of a surface defined over a number field, when the bound on the height tends to infinity. In particular, we show that this can be connected to the Batyrev-Manin-Peyre conjecture, *i.e.* the case of rational points, on some punctual Hilbert scheme. Our study shows that these associated Hilbert schemes provide, under certain conditions, new counterexamples to the Batyrev-Manin-Peyre conjecture. However, in the cases of $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ and $\mathbf{P}^2$ detailed in this article, the associated Hilbert schemes satisfy a slightly weaker version of the Batyrev-Manin-Peyre conjecture.

Texte reçu le 5 juillet 2018, modifié le 9 avril 2019, accepté le 15 avril 2019.

CÉCILE LE RUDULIER, Institut de recherche mathématique de Rennes (IRMAR), Université de Rennes 1, Beaulieu – Bâtiment 22–23, 263 avenue du Général Leclerc, F-35042 Rennes cedex • *E-mail :* `cecile.lerudulier@gmail.com`

Classification mathématique par sujets (2010). — 14G05, 11G35, 14C05, 11G50.

Mots clefs. — Théorie des nombres, Point algébrique, Schéma de Hilbert, Hauteur.

doi:10.24033/bsmf.2796

1. Introduction

Un des problèmes majeurs de la géométrie diophantienne est l'étude de la répartition, selon leur hauteur, des points rationnels d'une variété projective lisse X définie sur un corps de nombres K. Il existe notamment de nombreux travaux visant à étudier la conjecture de Batyrev-Manin [2] qui propose une formule asymptotique pour le nombre de points rationnels de hauteur bornée. Récemment, cette étude s'est élargie au cas des points algébriques de degré donné, en particulier sur l'espace projectif $\mathbf{P}^n$ (voir les travaux de [9, 14, 21, 25]). Nous souhaiterions ici examiner ce problème sous un nouvel angle et le mettre en relation avec la conjecture de Batyrev-Manin sur une variété auxiliaire. Nous considérerons ici, plus précisément, une variante des conjectures énoncées dans [2] et [17] et qui peut être formulée de la manière suivante.

Conjecture 1.1. — *Soit V une variété projective lisse définie sur un corps de nombres K et dont le fibré anticanonique ω_V^{-1} est gros. On se donne une métrique adélique sur le fibré en droites ω_V^{-1} et on notera $H_{\omega_V^{-1},K}$ la hauteur exponentielle sur $V(K)$ associée. Alors pour une extension assez grande L de K, il existe un ensemble mince $Z \subset V(L)$ tels que*

$$\#\{x \in V(L) - Z \mid H_{\omega_V^{-1},L}(x) \leqslant B\} \underset{B\to+\infty}{\sim} c_{H_{\omega_V^{-1},L},L}(V)\, B(\log B)^{\mathrm{rg}\ \mathrm{Pic}(V)-1},$$

où $c_{H_{\omega_V^{-1},L},L}(V)$ est la constante définie par Peyre.

Un ensemble mince, au sens de [22], est défini de la manière suivante.

Définition 1.2. — Soit V une variété définie sur K. Un *ensemble mince* de $V(K)$ est une réunion finie d'ensembles de la forme $f(Y(K))$, où Y est une variété intègre sur K et $f\colon Y \to V$ est un morphisme génériquement fini sans section rationnelle sur K.

Dans la conjecture originelle de Batyrev-Manin [2], il était supposé que l'ensemble exceptionnel Z était l'ensemble des points rationnels d'une sous-variété fermée stricte de V, qui est un cas particulier d'ensemble mince. Dans la suite, nous parlerons de la *Conjecture 1.1 forte* lorsque l'ensemble Z sera supposé de cette forme. La Conjecture 1.1 forte a été démontrée pour de nombreuses variétés de Fano, l'ensemble Z étant éventuellement vide (c'est le cas, par exemple, lorsque la variété V est l'espace projectif $\mathbf{P}^n$ [17, Corollaire 6.2.18 p. 169]). Cette conjecture forte est cependant trop restrictive, comme l'a montré le contre-exemple de Batyrev et Tschinkel [3]. C'est pourquoi nous avons ici formulé une conjecture légèrement plus faible, en suivant une suggestion de Peyre [18, fin du paragraphe 6]. De plus, si la conjecture a d'abord été énoncée dans le cas des variétés de Fano, pour lesquelles le fibré anticanonique est ample, elle est ici généralisée au cas où ce fibré est seulement supposé gros, puisque c'est ce cas qui va nous intéresser dans cet article. Dans cet article, nous donnerons toute une famille de nouveaux contre-exemples, à fibrés anticanoniques gros mais pas amples, à la conjecture forte (voir le Paragraphe 2.4.1) et démontrerons, dans certains cas particuliers, que la Conjecture 1.1 est néanmoins vraie.

Revenons maintenant à notre problème initial, qui est d'étudier le nombre de points de degré m sur K et de hauteur bornée d'une variété algébrique X définie sur K. Ce problème nous amène naturellement à étudier le nombre de points rationnels du m-ième produit symétrique de X, variété algébrique définie sur K, notée $\mathrm{Sym}^m X$. Dans le cas où X est la droite projective $\mathbf{P}^1$, la variété $\mathrm{Sym}^m \mathbf{P}^1$ n'est autre que $\mathbf{P}^m$, variété pour laquelle la Conjecture 1.1 forte est vérifiée ([17]). Nous avons traité ce cas dans [12], avec $\mathbf{P}^1(\overline{\mathbf{Q}})$ muni d'une hauteur adélique admissible quelconque relative à $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1)$. Ceci a permis de généraliser le résultat de [14] valable pour la hauteur usuelle sur $\mathbf{P}^1(\overline{\mathbf{Q}})$. Nous souhaiterions employer la même méthode dans le cas des points algébriques sur une variété de dimension supérieure. Cependant, lorsque l'entier m et la dimension de la variété X sont supérieurs ou égaux à 2, la variété $\mathrm{Sym}^m X$ est singulière. Dans ce cas, la méthode générale pour étudier la conjecture de Batyrev-Manin sur cette variété consiste à passer par une désingularisation. Si la variété X est une surface projective lisse, le morphisme de Hilbert-Chow, défini sur le schéma de Hilbert de m points sur X, noté $\mathrm{Hilb}^m X$, et à valeurs dans $\mathrm{Sym}^m X$, remplit cette fonction.

Le premier objectif de cet article sera donc d'expliquer précisément le lien entre le problème de la répartition des points algébriques sur une surface projective lisse X et la Conjecture 1.1 sur le schéma de Hilbert ponctuel de cette surface. L'étude de celle-ci fait intervenir le fibré anticanonique, le groupe de Picard et, dans la constante de Peyre, le cône effectif de $\mathrm{Hilb}^m X$, que nous déterminerons, au moins dans des cas particuliers.

Le second objectif est de démontrer la Conjecture 1.1 dans les cas de $\mathrm{Hilb}^2 \mathbf{P}^2$ et de $\mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)$, sur le corps $\mathbf{Q}$. Le premier cas est en fait une conséquence directe du travail de Schmidt [21] sur les points quadratiques de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}}$. Nous montrons que la Conjecture 1.1 est vraie pour $\mathrm{Hilb}^2 \mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}}$, pour une certaine hauteur, si on enlève un ensemble mince dense dont la contribution est du même ordre de grandeur. Notre travail ne permet pas encore de déterminer s'il est nécessaire d'écarter cet ensemble dense pour obtenir l'équivalent proposé par Batyrev, Manin et Peyre, mais nous pensons que c'est effectivement le cas. Pour $\mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)_{\mathbf{Q}}$, nous obtiendrons un contre-exemple plus flagrant à la Conjecture 1.1 forte. En effet, nous allons montrer la Conjecture 1.1 avec Z un ensemble mince et dense de $\mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)(\mathbf{Q})$ strictement accumulateur, dont nous déterminerons précisément la contribution. L'ensemble Z sera une union disjointe $Z = Z_0 \cup Z_1 \cup E(\mathbf{Q})$, avec $E(\mathbf{Q})$ le fermé strict de $\mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)_{\mathbf{Q}}$ au-dessus du lieu singulier de $\mathrm{Sym}^2(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)$, $Z_0 \subset \mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)(\mathbf{Q})$ un ensemble mince et dense et $Z_1 \subset \mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)(\mathbf{Q})$ un ensemble mince inclus, lui, dans une sous-variété stricte de $\mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)$. Ces ensembles sont définis dans le Théorème 4.3.

Nous montrerons alors, pour une certaine hauteur anticanonique $H_{\omega^{-1},\mathbf{Q}}$ sur $\mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)(\mathbf{Q})$, le théorème suivant.

Théorème 1.3. — 1. *Pour tout ouvert non vide* U *de* $\mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)$,

$$\#\{z \in U(\mathbf{Q}) \cap Z_0 \mid H_{\omega^{-1},\mathbf{Q}}(z) \leqslant B\} \underset{B\to+\infty}{\sim} \frac{8}{\zeta(2)^4} B \log^3 B;$$

2. *Pour tout nombre réel* B,

$$\#\{z \in Z_1(\mathbf{Q}) \mid H_{\omega^{-1},\mathbf{Q}}(z) \leqslant B\} = \frac{8 Z_{\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}),H}(6)}{\zeta(3)} B^{3/2} + O(B \log B);$$

3. *Pour tout nombre réel* B,

$$\begin{aligned}&\#\{z \in \mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)(\mathbf{Q}) - Z \mid H_{\omega^{-1},\mathbf{Q}}(z) \leqslant B\}\\ &\quad = c_3 B \log^2 B + O(B \log^{3/2} B)\end{aligned}$$

et c_3 *est la constante définie par Peyre pour la hauteur* $H_{\omega^{-1},\mathbf{Q}}$.

Remarque 1. — *Le contre-exemple à la conjecture forte est donné par l'ensemble mince et dense* Z_1 *et porte sur la puissance du* $\log B$, *comme dans le contre-exemple de Batyrev-Tschinkel.*

Quelques notations. — Nous noterons M_K l'ensemble des places du corps de nombres K et $\mathcal{O}_K$ l'anneau des entiers algébriques de K. De plus, r_K désignera le nombre de plongements réels de K, s_K le nombre de paires de plongements complexes (non réels) conjugués de K, Δ_K le discriminant de K, h_K le nombre de classes d'idéaux de K, w_K le nombre de racines de l'unité de K, R_K le régulateur de K et ζ_K la fonction zêta du corps de nombres K.

L'ensemble $M_{\mathbf{Q}}$ sera identifié à l'ensemble $\{p \mid p = \infty \text{ ou } p \text{ nombre premier}\}$; nous noterons $|\cdot|_\infty$ la restriction à $\mathbf{Q}$ de la valeur absolue usuelle de $\mathbf{R}$ et, si p est un nombre premier, $|\cdot|_p$ la valeur absolue p-adique vérifiant $|p|_p = \frac{1}{p}$. Lorsque K est un corps de nombres quelconque, nous noterons $|\cdot|_v$ le représentant de la place $v \in M_K$ dont la restriction à $\mathbf{Q}$ est l'une des valeurs absolues sur $\mathbf{Q}$ définies ci-dessus et nous noterons p_v la place de $\mathbf{Q}$ correspondante. Nous noterons K_v le complété de K pour la topologie induite par la valeur absolue $|\cdot|_v$ et $\mathbf{C}_v$ le complété de la clôture algébrique de K_v. Le nombre d_v de plongements de K dans $\mathbf{C}_{p_v}$ est alors égal au degré $[K_v : \mathbf{Q}_{p_v}]$.

Nous appellerons *hauteur usuelle* sur $\mathbf{P}^n(K)$, la hauteur H_K définie, pour tout $x \in \mathbf{P}^n(K)$ de coordonnées homogènes $[x_0 : \cdots : x_n]$, par

$$H_K(x) = \prod_{v \in M_K} \max\{|x_0|_v, \ldots, |x_n|_v\}^{d_v}$$

et nous appellerons *hauteur absolue usuelle* sur $\mathbf{P}^n(\overline{\mathbf{Q}})$, la hauteur H donnée, pour tout $x \in \mathbf{P}^n(\bar{\mathbf{Q}})$, par

$$H(x) = H_K(x)^{1/[K:\mathbf{Q}]},$$

où K est un corps de nombres quelconque tel que $x \in \mathbf{P}^n(K)$.

2. Points algébriques et schéma de Hilbert

Soit X une variété projective lisse définie sur un corps de nombre K de degré $d = [K : \mathbf{Q}]$. Nous supposerons de plus que son fibré anticanonique est ample (X est alors dite *de Fano*). On munit le fibré anticanonique ω_X^{-1} d'une métrique adélique admissible $(\|\cdot\|_v)_{v\in M_K}$. Pour les définitions et les propriétés de ces métriques, nous renvoyons à [12]. Nous noterons $H_{\omega_X^{-1}}$ la hauteur absolue (exponentielle) sur $X(\overline{\mathbf{Q}})$ associée à cette métrique. Intéressons-nous aux points algébriques de X. Le degré d'un point $x \in X(\bar{K})$ est par définition le degré sur K du corps résiduel $K(x)$ de x. Puisque le fibré ω_X^{-1} est ample, l'ensemble

$$\{x \in X(\bar{K}) \mid [K(x) : K] = m,\ H_{\omega_X^{-1}}(x) \leqslant B\}$$

est fini pour tout $m \geqslant 1$ et tout réel $B \geqslant 0$. Il est donc légitime d'étudier son cardinal.

Le but de cette partie est d'établir le lien entre l'ensemble des points algébriques de degré m de X et l'ensemble des points rationnels sur le m-ième produit symétrique de X. Nous préciserons ensuite la Conjecture 1.1 sur $\operatorname{Sym}^m X$, lorsque X est une surface.

2.1. Produit symétrique et points algébriques. — Pour tout entier $m \geqslant 1$, le m-ième produit symétrique de X est la variété projective quotient

$$\operatorname{Sym}^m X = X^m/\mathfrak{S}_m,$$

où $\mathfrak{S}_m$ est le groupe symétrique d'ordre m, agissant sur X^m par permutation des facteurs. Nous noterons $\pi\colon X^m \to \operatorname{Sym}^m X$ la projection canonique.

Considérons un point $x \in X(\bar{K})$ de degré $m \geqslant 1$. Alors l'orbite de x sous l'action du groupe de Galois $\operatorname{Gal}(\bar{K}/K)$ contient exactement m points, notés $x_1, \ldots, x_m$ et appelés conjugués de x. Nous pouvons alors définir un point $\tilde{x} = \pi(x_1, \ldots, x_m)$ de $\operatorname{Sym}^m X(\bar{K})$. Celui-ci est invariant sous l'action de $\operatorname{Gal}(\bar{K}/K)$, donc est rationnel sur K, ou encore de degré 1.

Définition 2.1. — Les points de $\operatorname{Sym}^m X(K)$ de la forme $\tilde{x}$, provenant d'un point x de degré m de $X(\bar{K})$, seront dits *irréductibles* ; les autres seront dits *réductibles.*