

QUELQUES REMARQUES SUR LE PRINCIPE DE FONCTORIALITÉ

par

Laurent Lafforgue

Introduction

On s'intéresse au transfert automorphe entre groupes linéaires sur les corps de fonctions.

Ce transfert résulte de la correspondance de Langlands sur ces corps, mais on voudrait bien pouvoir le démontrer directement par des calculs sur les groupes adéliques, comme dans la théorie de l'endoscopie.

On montre que l'existence du transfert automorphe entre deux groupes linéaires quelconques est équivalente à l'égalité de deux fonctionnelles.

Chacune de ces fonctionnelles est définie comme résidu d'une certaine série formelle qui vérifie les deux propriétés suivantes :

- c'est une fraction rationnelle, comme conséquence du théorème de décomposition spectrale de Langlands,
- tous ses coefficients sont donnés par des expressions explicites et « géométriques », c'est-à-dire obtenues en évaluant certaines fonctions adéliques en les points rationnels des groupes considérés.

On voit donc que, même si cela se fait d'une manière compliquée, le principe de fonctorialité peut s'exprimer en termes uniquement géométriques, qui ne font plus référence à l'analyse spectrale.

Nous étudions particulièrement le cas « non abélien » le plus simple qui est l'induction automorphe de $GL(1)$ à $GL(2)$ via une extension quadratique.

Même dans ce cas, nous ne savons pas démontrer directement l'énoncé géométrique voulu.

Les cinq exposés rassemblés ici ont été donnés à l'IHÉS en mai et juin 2006 puis répétés sous un autre angle dans le cadre de l'école d'été « Autour des motifs » organisée à l'IHÉS dans la deuxième quinzaine du mois de juillet 2006. Ils seront suivis

d'autres publications qui permettront de généraliser et de préciser les conjectures des exposés IV et V.

Ce travail est inspiré par les récentes tentatives de Langlands pour aller « au-delà de l'endoscopie » (voir dans la bibliographie ses deux articles de 2004 et 2007).

L'auteur adresse ses profonds remerciements à Cécile Gourgues qui a assuré la frappe du manuscrit avec son efficacité habituelle.

Table des matières

Introduction	49
Exposé I : Principe de diagonalisation	52
I.1. Groupes linéaires adéliques	52
I.2. Le théorème de décomposition spectrale de Langlands	53
I.3. L'expression spectrale des noyaux	58
I.4. Isomorphisme de Satake et groupe dual de Langlands	59
I.5. Le principe de fonctorialité de Langlands	62
I.6. Première idée de ce que l'on voudrait faire : comparer deux formules de traces « diagonales »	67
I.7. Diagonalisation d'un produit de formules de traces au moyen de séries formelles	70
Exposé II : Travail sur les noyaux	75
II.8. Expression locale concrète du transfert	75
II.9. Disparition des séries d'Eisenstein de type cuspidal	79
II.10. La formule d'inversion de Shalika	87
II.11. Comment retrouver les traces cuspidales	92
Exposé III : Développements asymptotiques	99
III.12. L'opérateur de Shalika appliqué aux séries d'Eisenstein ..	99
III.13. Diagonalisation des noyaux d'Eisenstein transformés	104
III.14. Le cas $G = \mathrm{GL}_2$: calcul de résidus	107
III.15. Le cas $G = \mathrm{GL}_2$: déplacement des contours d'intégration	115
III.16. Le cas de l'induction automorphe de GL_1 à GL_2	120
III.17. Développements asymptotiques et formules de traces	126
III.18. Développements asymptotiques et partie spectrale du principe de fonctorialité	130
Exposé IV : Et du côté géométrique ?	133
IV.19. Expression géométrique des moyennes des noyaux tronqués 134	
IV.20. Modèles de Whittaker et décompositions spectrales locales	137
IV.21. Convolution de deux noyaux de Whittaker locaux via un homomorphisme de transfert	144
IV.22. Une conjecture vague d'interversion d'une limite et d'une somme	146

Exposé V : Des calculs géométriques et une conjecture dans le cas de
 l'induction automorphe de GL_1 à GL_2 ou GL_r 152

V.23. Le cas de l'induction automorphe quadratique de GL_1 à
 GL_2 153

V.24. Préparation au calcul des intégrales locales 158

V.25. Le cas où x est scindée et $k_1 + k_2 = 0$ 162

V.26. Le cas où x est scindée et $k_1 + k_2 = 1$ 166

V.27. Le cas où x est inerte et non ramifiée et où $h_x = \mathbf{1}_x$ 169

V.28. Calcul des coefficients de Fourier locaux 173

V.29. Une conjecture pour le calcul de la moyenne sur les éléments
 rationnels, dans le cas de l'induction automorphe de GL_1
 à GL_r 180

Remarques de conclusion 183

Références 184

Exposé I : Principe de diagonalisation

I.1. Groupes linéaires adéliques. – On se placera toujours sur le corps des fonctions F d'une courbe X projective, lisse et géométriquement connexe sur un corps fini \mathbb{F}_q .

On note $|X|$ l'ensemble des places de F identifiées aux points fermés de X .

Pour toute place $x \in |X|$, on note :

- F_x le complété x -adique de F ,
- O_x l'anneau des entiers de F_x ,
- $\deg(x)$ la dimension sur \mathbb{F}_q du corps résiduel $\kappa(x)$ de O_x , avec donc $|\kappa(x)| = q^{\deg(x)} = q_x$,
- $x : F_x^\times \rightarrow \mathbb{Z}$ la valuation qui accorde la valeur 1 aux éléments uniformisants de O_x , et $|\bullet| = q_x^{-v_x(\bullet)}$ la norme associée.

On notera $\mathbb{A} = \mathbb{A}_F$ l'anneau des adèles de F et $O_{\mathbb{A}} = O_{\mathbb{A}_F}$ son sous-anneau des entiers.

On dispose de l'homomorphisme de degré

$$\begin{aligned} \deg : \quad \mathbb{A}^\times &\rightarrow \mathbb{Z} \\ (a_x)_{x \in |X|} &\mapsto - \sum_x \deg(x) \cdot x(a_x). \end{aligned}$$

Son noyau $\mathbb{A}^{\times 0}$ contient F^\times d'après la « formule du produit » et le quotient $F^\times \backslash \mathbb{A}^{\times 0}$ est compact.

Pour nous, un « groupe linéaire sur F » sera un groupe algébrique réductif quasi-déployé sur F de la forme

$$G = \prod_{i \in I_G} \text{Res}_{E_i/F} \text{GL}_{r_i}$$

où I_G est un ensemble fini d'indices et où, pour tout $i \in I_G$, E_i désigne une extension finie séparée de F et $\text{Res}_{E_i/F} \text{GL}_{r_i}$ désigne le groupe algébrique sur F déduit de GL_{r_i} par restriction des scalaires à la Weil de E_i à F .

Il lui est associé un groupe linéaire adélique

$$G(\mathbb{A}) = \prod_{i \in I_G} \text{GL}_{r_i}(\mathbb{A}_{E_i})$$

qui contient le sous-groupe ouvert compact maximal

$$\begin{aligned} K_0^G &= \prod_{i \in I_G} \text{GL}_{r_i}(O_{\mathbb{A}_{E_i}}) \\ &= \prod_{x \in |X|} K_{0,x}^G. \end{aligned}$$

On note \mathcal{M}_G l'ensemble fini des sous-groupes de Lévi « standard » de G , c'est-à-dire ceux dont la composante dans chaque $\text{Res}_{E_i/F} \text{GL}_{r_i}$ est un produit de blocs associé à une partition de l'entier r_i .

Le plus petit des sous-groupes de Lévi standard est le tore diagonal

$$T_G = \prod_{i \in I_G} \text{Res}_{E_i/F} \mathbb{G}_m^{r_i}.$$

Puis on note \mathcal{P}_G l'ensemble fini des sous-groupes paraboliques P de G dont le sous-groupe de Lévi M_P est élément de \mathcal{M}_G . Pour chaque $P \in \mathcal{P}_G$, on note N_P son radical unipotent.

On dispose du groupe de Weyl de G

$$W_G = \prod_{i \in I_G} \mathfrak{S}_{r_i}$$

et des sous-groupes de Weyl $W_M \subseteq W_G$ des sous-groupes de Lévi $M \in \mathcal{M}_G$.

Pour tous $P, P' \in \mathcal{P}_G$, on note $\text{Isom}(P, P')$ l'ensemble des doubles classes

$$w \in W_{M_{P'}} \backslash W_G / W_{M_P}$$

telles que

$$w^{-1} \cdot M_{P'} \cdot w = M_P,$$

ce qui implique

$$w^{-1} \cdot W_{M_{P'}} \cdot w = W_{M_P}.$$

Si $P, P', P'' \in \mathcal{P}_G$ et $w \in \text{Isom}(P, P')$, $w' \in \text{Isom}(P', P'')$, $w'w$ est bien défini en tant qu'élément de $\text{Isom}(P, P'')$, si bien que \mathcal{P}_G devient un groupoïde.

1.2. Le théorème de décomposition spectrale de Langlands. – Le centre de G est

$$Z_G = \prod_{i \in I_G} \text{Res}_{E_i/F} \mathbb{G}_m,$$

et le centre de $G(\mathbb{A})$ est

$$Z_G(\mathbb{A}) = \prod_{i \in I_G} \mathbb{A}_{E_i}^\times.$$

Il contient comme sous-groupe fermé

$$\prod_{i \in I_G} \mathbb{A}_F^\times.$$

On choisit dans celui-ci un sous-groupe discret A_G tel que

$$A_G \hookrightarrow \prod_{i \in I_G} \mathbb{A}_F^\times \xrightarrow{\text{deg}} \mathbb{Z}^{I_G}$$

soit injectif et de conoyau fini, et donc que A_G soit un sous-groupe discret et cocompact de $Z_G(F) \backslash Z_G(\mathbb{A})$.

Pour cela, on peut choisir par exemple une place $x_0 \in |X|$, un élément $a_0 \in F_{x_0}^\times$ de valuation non nulle, et poser $A_G = (a_0^{\mathbb{Z}})^{I_G}$.