Panoramas & Synthèses
29, 2009, p. 49–185

QUELQUES REMARQUES SUR LE PRINCIPE DE FONCTORIALITÉ

par

Laurent Lafforgue

Introduction

On s'intéresse au transfert automorphe entre groupes linéaires sur les corps de fonctions.

Ce transfert résulte de la correspondance de Langlands sur ces corps, mais on voudrait bien pouvoir le démontrer directement par des calculs sur les groupes adéliques, comme dans la théorie de l'endoscopie.

On montre que l'existence du transfert automorphe entre deux groupes linéaires quelconques est équivalente à l'égalité de deux fonctionnelles.

Chacune de ces fonctionnelles est définie comme résidu d'une certaine série formelle qui vérifie les deux propriétés suivantes :

- c'est une fraction rationnelle, comme conséquence du théorème de décomposition spectrale de Langlands,
- tous ses coefficients sont donnés par des expressions explicites et « géométriques », c'est-à-dire obtenues en évaluant certaines fonctions adéliques en les points rationnels des groupes considérés.

On voit donc que, même si cela se fait d'une manière compliquée, le principe de fonctorialité peut s'exprimer en termes uniquement géométriques, qui ne font plus référence à l'analyse spectrale.

Nous étudions particulièrement le cas « non abélien » le plus simple qui est l'induction automorphe de GL(1) à GL(2) via une extension quadratique.

Même dans ce cas, nous ne savons pas démontrer directement l'énoncé géométrique voulu.

Les cinq exposés rassemblés ici ont été donnés à l'IHÉS en mai et juin 2006 puis répétés sous un autre angle dans le cadre de l'école d'été « Autour des motifs » organisée à l'IHÉS dans la deuxième quinzaine du mois de juillet 2006. Ils seront suivis d'autres publications qui permettront de généraliser et de préciser les conjectures des exposés IV et V.

Ce travail est inspiré par les récentes tentatives de Langlands pour aller « au-delà de l'endoscopie » (voir dans la bibliographie ses deux articles de 2004 et 2007).

L'auteur adresse ses profonds remerciements à Cécile Gourgues qui a assuré la frappe du manuscrit avec son efficacité habituelle.

Table des matières

Exposé I : Principe de diagonalisation

I.1. Groupes linéaires adéliques. – On se placera toujours sur le corps des fonctions F d'une courbe X projective, lisse et géométriquement connexe sur un corps fini $\mathbb{F}_q$.

On note $|X|$ l'ensemble des places de F identifiées aux points fermés de X.

Pour toute place $x \in |X|$, on note :

- F_x le complété x-adique de F,
- O_x l'anneau des entiers de F_x,
- $\deg(x)$ la dimension sur $\mathbb{F}_q$ du corps résiduel $\kappa(x)$ de O_x, avec donc $|\kappa(x)| = q^{\deg(x)} = q_x$,
- $x : F_x^\times \to \mathbb{Z}$ la valuation qui accorde la valeur 1 aux éléments uniformisants de O_x, et $|\bullet| = q_x^{-v_x(\bullet)}$ la norme associée.

On notera $\mathbb{A} = \mathbb{A}_F$ l'anneau des adèles de F et $O_\mathbb{A} = O_{\mathbb{A}_F}$ son sous-anneau des entiers.

On dispose de l'homomorphisme de degré

$$\begin{array}{rccl} \deg & : & \mathbb{A}^\times & \to & \mathbb{Z} \\ & & (a_x)_{x\in|X|} & \mapsto & -\sum_x \deg(x)\cdot x(a_x)\,. \end{array}$$

Son noyau $\mathbb{A}^{\times 0}$ contient $F^\times$ d'après la « formule du produit » et le quotient $F^\times\backslash\mathbb{A}^{\times 0}$ est compact.

Pour nous, un « groupe linéaire sur F » sera un groupe algébrique réductif quasi-déployé sur F de la forme

$$G = \prod_{i\in I_G} \mathrm{Res}_{E_i/F}\,\mathrm{GL}_{r_i}$$

où I_G est un ensemble fini d'indices et où, pour tout $i \in I_G$, E_i désigne une extension finie séparée de F et $\mathrm{Res}_{E_i/F}\,\mathrm{GL}_{r_i}$ désigne le groupe algébrique sur F déduit de GL_{r_i} par restriction des scalaires à la Weil de E_i à F.

Il lui est associé un groupe linéaire adélique

$$G(\mathbb{A}) = \prod_{i\in I_G} \mathrm{GL}_{r_i}(\mathbb{A}_{E_i})$$

qui contient le sous-groupe ouvert compact maximal

$$\begin{aligned} K_0^G &= \prod_{i\in I_G} \mathrm{GL}_{r_i}(O_{\mathbb{A}_{E_i}}) \\ &= \prod_{x\in|X|} K_{0,x}^G\,. \end{aligned}$$

On note $\mathscr{M}_G$ l'ensemble fini des sous-groupes de Lévi « standard » de G, c'est-à-dire ceux dont la composante dans chaque $\mathrm{Res}_{E_i/F}\,\mathrm{GL}_{r_i}$ est un produit de blocs associé à une partition de l'entier r_i.

Le plus petit des sous-groupes de Lévi standard est le tore diagonal

$$T_G = \prod_{i\in I_G} \mathrm{Res}_{E_i/F}\,\mathbb{G}_m^{r_i}\,.$$

Puis on note $\mathscr{P}_G$ l'ensemble fini des sous-groupes paraboliques P de G dont le sous-groupe de Lévi M_P est élément de $\mathscr{M}_G$. Pour chaque $P\in\mathscr{P}_G$, on note N_P son radical unipotent.

On dispose du groupe de Weyl de G

$$W_G = \prod_{i\in I_G} \mathfrak{S}_{r_i}$$

et des sous-groupes de Weyl $W_M\subseteq W_G$ des sous-groupes de Lévi $M\in\mathscr{M}_G$.

Pour tous $P,P'\in\mathscr{P}_G$, on note $\mathrm{Isom}(P,P')$ l'ensemble des doubles classes

$$w\in W_{M_{P'}}\backslash W_G/W_{M_P}$$

telles que

$$w^{-1}\cdot M_{P'}\cdot w = M_P\,,$$

ce qui implique

$$w^{-1}\cdot W_{M_{P'}}\cdot w = W_{M_P}\,.$$

Si $P,P',P''\in\mathscr{P}_G$ et $w\in\mathrm{Isom}(P,P')$, $w'\in\mathrm{Isom}(P',P'')$, $w'\,w$ est bien défini en tant qu'élément de $\mathrm{Isom}(P,P'')$, si bien que $\mathscr{P}_G$ devient un groupoïde.

I.2. Le théorème de décomposition spectrale de Langlands. – Le centre de G est

$$Z_G = \prod_{i\in I_G} \mathrm{Res}_{E_i/F}\,\mathbb{G}_m\,,$$

et le centre de $G(\mathbb{A})$ est

$$Z_G(\mathbb{A}) = \prod_{i\in I_G} \mathbb{A}_{E_i}^{\times}\,.$$

Il contient comme sous-groupe fermé

$$\prod_{i\in I_G} \mathbb{A}_F^{\times}\,.$$

On choisit dans celui-ci un sous-groupe discret A_G tel que

$$A_G \hookrightarrow \prod_{i\in I_G} \mathbb{A}_F^{\times} \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z}^{I_G}$$

soit injectif et de conoyau fini, et donc que A_G soit un sous-groupe discret et cocompact de $Z_G(F)\backslash Z_G(\mathbb{A})$.

Pour cela, on peut choisir par exemple une place $x_0\in|X|$, un élément $a_0\in F_{x_0}^{\times}$ de valuation non nulle, et poser $A_G=(a_0^{\mathbb{Z}})^{I_G}$.