FROBENIUS ET DÉGÉNÉRESCENCE DE HODGE

Luc Illusie
Université de Paris-Sud
Département de Mathématiques
Bâtiment 425, 91405 Orsay Cedex, France

Dans [D-I], le théorème de dégénérescence de Hodge et le théorème d'annulation de Kodaira-Akizuki-Nakano pour les variétés projectives lisses sur un corps de caractéristique nulle sont démontrés par des méthodes de géométrie algébrique de caractéristique $p > 0$. Les présentes notes se veulent une introduction à ce texte, à l'intention du non spécialiste (qui pourra consulter aussi l'exposé d'Oesterlé [O]). Nous ne supposerons donc connus du lecteur que quelques rudiments de la théorie des schémas (EGA I 1-4, [H2] II 2-3). Par contre, nous demanderons de lui une certaine familiarité avec l'algèbre homologique. Les résultats de [D-I] s'expriment simplement dans le langage des catégories dérivées. Bien qu'il soit possible d'y éviter le recours, voir par exemple [E-V], nous avons préféré nous placer dans ce cadre, qui nous paraît plus naturel. Toutefois, pour aider le débutant, nous rappelons au n° 4 les définitions de base et quelques points essentiels.*

0. Introduction

Soit $\mathcal{X}$ une variété analytique complexe. Par le lemme de Poincaré, le complexe de De Rham $\Omega^\bullet_{\mathcal{X}}$ des formes holomorphes sur $\mathcal{X}$ est une résolution du faisceau constant $\mathbb{C}$. L'augmentation $\mathbb{C} \longrightarrow \Omega^\bullet_{\mathcal{X}}$ définit donc, pour tout n, un isomorphisme

$$H^n(\mathcal{X}, \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} H^n_{\mathrm{DR}}(\mathcal{X}) = H^n(\mathcal{X}, \Omega^\bullet_{\mathcal{X}}), \tag{0.1}$$

où le second membre, appelé *cohomologie de De Rham* de $\mathcal{X}$ (en degré n), est le n-ième groupe d'hypercohomologie de $\mathcal{X}$ à valeurs dans $\Omega^\bullet_{\mathcal{X}}$. La cohomologie de De Rham de $\mathcal{X}$ est l'aboutissement de la première suite spectrale d'hypercohomologie

$$E_1^{p\,q} = H^q(\mathcal{X}, \Omega^p_{\mathcal{X}}) \Longrightarrow H^{p+q}_{\mathrm{DR}}(\mathcal{X}), \tag{0.2}$$

dite *suite spectrale de Hodge vers De Rham* (ou *de Hodge-Frölicher*) (cf. [De] n° 9). Supposons $\mathcal{X}$ *compacte*. Alors, par le théorème de finitude de Cartan-Serre, les $H^q(\mathcal{X}, \Omega^p_{\mathcal{X}})$, et donc tous les termes de la suite spectrale (0.2) sont des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension finie. Si l'on pose

$$b_n = \dim H^n_{\mathrm{DR}}(\mathcal{X}) = \dim H^n(\mathcal{X}, \mathbb{C})$$

(n-ième nombre de Betti de $\mathcal{X}$) et

$$h^{p\,q} = \dim H^q(\mathcal{X}, \Omega^p_{\mathcal{X}})$$

* L'auteur tient à remercier Matthieu Rambaud et Zhangchi Chen qui lui ont indiqué une grande partie des erreurs typographiques corrigées dans cette deuxième édition.

(nombre de Hodge), on a donc

$$b_n \leqslant \sum_{p+q=n} h^{p\,q}, \tag{0.3}$$

avec égalité pour tout n si et seulement si (0.2) dégénère en E_1. Supposons de plus $\mathcal{X}$ *kählérienne*. Alors, par la *théorie de Hodge*, la suite spectrale de Hodge de $\mathcal{X}$ dégénère en E_1 : c'est le *théorème de dégénérescence de Hodge* ([De] 9.9). Notons

$$0 = F^{n+1} \subset F^n \subset \cdots \subset F^p = F^p H^n_{\mathrm{DR}}(\mathcal{X}) \subset \cdots \subset F^0 = H^n_{\mathrm{DR}}(\mathcal{X})$$

la filtration aboutissement de la suite spectrale de Hodge (*filtration de Hodge*) ; par la dégénérescence, on a donc un isomorphisme canonique

$$E_1^{p\,q} = H^q(\mathcal{X}, \Omega^p_{\mathcal{X}}) \simeq E_\infty^{p\,q} = F^p/F^{p+1}. \tag{0.4}$$

Posons

$$H^{p\,q} = F^p \cap \overline{F}^q,$$

où la barre désigne la conjugaison complexe sur $H^n_{\mathrm{DR}}(\mathcal{X})$, définie au moyen de (0.1) et de l'isomorphisme $H^n(\mathcal{X}, \mathbb{C}) \simeq H^n(\mathcal{X}, \mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}$; on a donc

$$H^{p\,q} = \overline{H}^{q\,p}.$$

La théorie de Hodge fournit en outre les résultats suivants ([De] 9.10) :

(a) l'homomorphisme composé

$$H^{p\,q} \hookrightarrow F^p H^{p+q}_{\mathrm{DR}}(\mathcal{X}) \twoheadrightarrow F^p/F^{p+1}$$

est un isomorphisme (i.e. $H^{p\,q}$ est un supplémentaire de F^{p+1} dans F^p) ; d'où, par composition avec (0.4), un isomorphisme

$$H^{p\,q} \simeq H^q(\mathcal{X}, \Omega^p_{\mathcal{X}}) \ ; \tag{0.5}$$

(b) on a, pour tout n,

$$H^n_{\mathrm{DR}}(\mathcal{X}) = \bigoplus_{p+q=n} H^{p\,q}, \tag{0.6}$$

(*décomposition de Hodge*). Ces résultats s'appliquent notamment à la variété analytique complexe $\mathcal{X}$ associée à un schéma projectif lisse X sur $\mathbb{C}$. A la différence de (a) et (b), qui sont de nature transcendante, faisant intervenir de manière essentielle la conjugaison complexe, la dégénérescence de Hodge peut, dans ce cas, se formuler de manière purement algébrique. Le complexe de De Rham de $\mathcal{X}$ est en effet le complexe de faisceaux analytiques associé au complexe de De Rham algébrique $\Omega^\bullet_X$ de X sur $\mathbb{C}$ (un complexe de faisceaux pour la topologie de Zariski, dont les composantes sont des faisceaux cohérents localement libres). Le morphisme canonique (d'espaces annelés) $\mathcal{X} \to X$ induit des homomorphismes sur les cohomologies de Hodge et de De Rham

$$H^q(X, \Omega^p_X) \longrightarrow H^q(\mathcal{X}, \Omega^p_{\mathcal{X}}), \tag{0.7}$$

$$H^n_{\mathrm{DR}}(X) \longrightarrow H^n_{\mathrm{DR}}(\mathcal{X}), \tag{0.8}$$

où $H^n_{\mathrm{DR}}(X) = H^n(X, \Omega^\bullet_X)$. On dispose en fait d'une suite spectrale de Hodge vers De Rham algébrique

$$E_1^{p\,q} = H^q(X, \Omega^p_X) \Longrightarrow H^{p+q}_{\mathrm{DR}}(X), \tag{0.9}$$

et d'un morphisme de (0.9) dans (0.2) induisant (0.7) et (0.8) respectivement sur les termes initiaux et l'aboutissement. Par le théorème de comparaison de Serre [GAGA], (0.7) est un isomorphisme. Il en est donc de même de (0.8). Par suite, la dégénérescence en E_1 de (0.2) équivaut à celle de (0.9), en d'autres termes, si l'on pose

$$h^{p\,q}(X) = \dim H^q(X, \Omega^p_X), \qquad h^n(X) = \dim H^n_{\mathrm{DR}}(X),$$

le théorème de dégénérescence de Hodge pour $\mathfrak{X}$ s'exprime par les relations (purement algébriques)

$$h^n(X) = \sum_{p+q=n} h^{p\,q}(X). \tag{0.10}$$

Plus généralement, si X est un schéma propre et lisse sur un corps k, on peut considérer le complexe de De Rham $\Omega^\bullet_{X/k}$ de X sur k, et l'on dispose encore d'une suite spectrale de Hodge vers De Rham

$$E_1^{p\,q} = H^q(X, \Omega^p_{X/k}) \Longrightarrow H^{p+q}_{\mathrm{DR}}(X/k) \tag{0.11}$$

(où $H^n_{\mathrm{DR}}(X/k) = H^n(X, \Omega^\bullet_{X/k})$), formée de k-espaces vectoriels de dimension finie. Si k est de caractéristique nulle, le théorème de dégénérescence de Hodge entraîne la dégénérescence de (0.11) en E_1 : des techniques standard (cf. n° 6) permettent en effet de se ramener d'abord à $k = \mathbb{C}$, puis à l'aide du lemme de Chow et de la résolution des singularités on réduit le cas propre au cas projectif ([D0]). On a longtemps cherché une démonstration purement algébrique de la dégénérescence de (0.11) en E_1 pour k de caractéristique nulle. Faltings [Fa1] fut le premier à en donner une preuve indépendante de la théorie de Hodge[1]. Une simplification de techniques cristallines dues à Ogus [Og1], Fontaine-Messing [F-M] et Kato [Ka1] conduisit, peu de temps après, à la démonstration élémentaire présentée dans [D-I]. Nous renvoyons à l'introduction de [D-I] et à [O] pour un aperçu de ses grandes lignes. Indiquons seulement que la dégénérescence de (0.11) (pour k de caractéristique nulle) se prouve par réduction au cas où k est de caractéristique > 0, où, pourtant, il peut arriver que la dégénérescence soit en défaut ! Celle-ci vaut cependant moyennant certaines hypothèses supplémentaires sur X (majoration de la dimension, relevabilité), qui suffisent (voir 5.6 pour un énoncé précis). Nous expliquons au n° 6 la technique bien connue permettant de remonter de la caractéristique > 0 à la caractéristique nulle. Le théorème de dégénérescence en caractéristique > 0 auquel nous venons de faire allusion résulte lui-même d'un théorème de décomposition (5.1), reposant sur des propriétés classiques du calcul différentiel en caractéristique > 0 (endomorphisme de Frobenius et isomorphisme de Cartier), que nous rappelons au n° 3, après avoir

[1] Les démonstrations des théorèmes de comparaison p-adiques dans [Fa1] et [Fa2] ont une lacune concernant le lemme de presque pureté, que Faltings a comblée dans [Fa3]. Voir [Fo] pour une mise à jour, utilisant la théorie de P. Scholze des espaces perfectoïdes. Noter aussi que la preuve de la dégénérescence de (0.11) qui en résulte nest pas entièrement algébrique, car elle utilise le théorème dArtin-Grothendieck de comparaison entre cohomologie étale et cohomologie de Betti pour les variétés propres et lisses sur $\mathbb{C}$.

résumé, aux n° 1 et 2, le formalisme des différentielles et de la lissité sur les schémas. Le théorème de décomposition précédent fournit en même temps une démonstration algébrique du théorème d'annulation de Kodaira-Akizuki-Nakano pour les variétés projectives lisses sur un corps de caractéristique nulle (6.10 et [De] 11.7). Les deux derniers numéros sont de nature plus technique : nous esquissons l'évolution du sujet depuis la parution de [D-I], et, en appendice, donnons quelques compléments relatifs à des résultats de Mehta-Srinivas [Me-Sr] et Nakkajima [Na].

1. Schémas : différentielles, complexe de De Rham

Nous rappelons ici les définitions et propriétés de base du calcul différentiel sur les schémas. Le lecteur trouvera un exposé complet dans (EGA IV 16.1-16.6) ; voir aussi [B-L-R] 2.1 et [H2] II 8 pour une introduction.

1.1. On dit qu'un morphisme de schémas $i : T_0 \to T$ est un *épaississement d'ordre* 1 (ou, par abus, que T est un épaississement d'ordre 1 de T_0) si i est une immersion fermée définie par un idéal de $\mathcal{O}_T$ de carré nul. Si T et T_0 sont affines, d'anneaux A et A_0, un tel morphisme correspond à un homomorphisme surjectif $A \to A_0$ dont le noyau est un idéal de carré nul. Les schémas T et T_0 ont même espace sous-jacent, et l'idéal $\mathfrak{a}$ de i, annulé par $\mathfrak{a}$, est un $\mathcal{O}_{T_0}$ ($= \mathcal{O}_T/\mathfrak{a}$)-module quasi-cohérent.

Soit $j : X \longrightarrow Z$ une immersion, d'idéal I (par définition, j est un isomorphisme de X sur un sous-schéma fermé $j(X)$ d'un plus grand ouvert U de Z, et I est le faisceau quasi-cohérent d'idéaux de U définissant $j(X)$ dans U, (EGA I 4.1, 4.2)). Soit Z_1 le sous-schéma[2] de Z, de même espace sous-jacent que X, défini par l'idéal I^2. Alors j se factorise (de manière unique) en

$$X \xrightarrow{j_1} Z_1 \xrightarrow{h_1} Z$$

où h_1 est une immersion, et j_1 est un épaississement d'ordre 1, d'idéal I/I^2 ; on dit que (j_1, h_1), ou plus simplement Z_1, est le *premier voisinage infinitésimal* de j (ou de X dans Z). L'idéal I/I^2 (qui est un $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent) s'appelle le *faisceau conormal* de j (ou de X dans Z). On le note $\mathcal{N}_{X/Z}$.

1.2. Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de schémas. Soit $\Delta : X \longrightarrow Z := X \times_Y X$ le morphisme diagonal. C'est une immersion (*fermée* si et seulement si X est *séparé sur* Y) (EGA I 5.3). Le faisceau conormal de Δ s'appelle faisceau des 1-*différentielles de Kähler* de f (ou de X sur Y) et se note $\Omega^1_{X/Y}$; on écrit parfois $\Omega^1_{X/A}$ au lieu de $\Omega^1_{X/Y}$ si Y est affine d'anneau A. C'est donc un $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent, défini par

(1.2.1) $$\Omega^1_{X/Y} = I/I^2,$$

où I est l'idéal de Δ. Soit $X \xrightarrow{\Delta_1} Z_1 \to Z$ le premier voisinage infinitésimal de Δ. Les deux projections de $Z = X \times_Y X$ sur X induisent, par composition avec $Z_1 \longrightarrow Z$, deux Y-morphismes $p_1, p_2 : Z_1 \longrightarrow X$, qui rétractent Δ_1. Le faisceau d'anneaux du schéma Z_1, qui a même espace sous-jacent que X, s'appelle *faisceau des parties*

[2] On se permettra l'abus de confondre "immersion" (resp. "immersion fermée") et "sous-schéma" (resp. "sous-schéma fermé") ; cela revient ici à négliger l'isomorphisme de X sur $j(X)$.

principales d'ordre 1 de X sur Y, et se note $\mathcal{P}^1_{X/Y}$. On a par construction une suite exacte de faisceaux abéliens

$$0 \longrightarrow \Omega^1_{X/Y} \longrightarrow \mathcal{P}^1_{X/Y} \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow 0, \tag{1.2.2}$$

scindée par chacun des homomorphismes d'anneaux $j_1, j_2 : \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{P}^1_{X/Y}$ déduits de p_1, p_2. La différence $j_2 - j_1$ est un homomorphisme de faisceaux abéliens de $\mathcal{O}_X$ dans $\Omega^1_{X/Y}$, qu'on appelle *différentielle*, et qu'on note

$$d_{X/Y} \quad (\text{ou } d) : \quad \mathcal{O}_X \longrightarrow \Omega^1_{X/Y}. \tag{1.2.3}$$

Si M est un $\mathcal{O}_X$-module, on appelle *Y-dérivation* de $\mathcal{O}_X$ dans M tout homomorphisme de faisceaux de $f^{-1}(\mathcal{O}_Y)$-modules $D : \mathcal{O}_X \longrightarrow M$ (où f^{-1} désigne le foncteur image inverse pour les faisceaux abéliens) tel que

$$D(ab) = aDb + bDa$$

pour toutes sections locales a, b de $\mathcal{O}_X$. On note $\mathrm{Der}_Y(\mathcal{O}_X, M)$ l'ensemble des Y-dérivations de $\mathcal{O}_X$ dans M, qui est de manière naturelle un groupe abélien. La différentielle $d_{X/Y}$ est une Y-dérivation de $\mathcal{O}_X$ dans $\Omega^1_{X/Y}$. On montre qu'elle est *universelle*, dans le sens que pour toute Y-dérivation D de $\mathcal{O}_X$ dans un $\mathcal{O}_X$-module M (non nécessairement quasi-cohérent), il existe un unique homomorphisme de $\mathcal{O}_X$-modules $u : \Omega^1_{X/Y} \longrightarrow M$ tel que $u \circ d_{X/Y} = D$, i.e. l'homomorphisme

$$\mathrm{Hom}(\Omega^1_{X/Y}, M) \longrightarrow \mathrm{Der}_Y(\mathcal{O}_X, M), \qquad u \longmapsto u \circ d_{X/Y} \tag{1.2.4}$$

est un isomorphisme. Le faisceau $\mathcal{H}om(\Omega^1_{X/Y}, \mathcal{O}_X)$ s'appelle *faisceau tangent* de f (ou de X sur Y), et se note

$$T_{X/Y} \tag{1.2.5}$$

(ou parfois $\Theta_{X/Y}$). Pour tout ouvert U de X, (1.2.4) donne un isomorphisme $\Gamma(U, T_{X/Y}) \simeq \mathrm{Der}_Y(\mathcal{O}_U, \mathcal{O}_U)$. Rappelons qu'on appelle *Y-point* de X un Y-morphisme $T \longrightarrow X$. Par définition, $X \times_Y X$ "paramètre" l'ensemble des couples de Y-points de X (i.e. représente le foncteur correspondant sur la catégorie des Y-schémas). La signification géométrique du premier voisinage infinitésimal Z_1 de la diagonale de X sur Y est qu'*il paramètre les couples de Y-points de X voisins d'ordre* 1 (i.e. congrus modulo un idéal de carré nul) : plus précisément, si $i : T_0 \longrightarrow T$ est un épaississement d'ordre 1, d'idéal $\mathfrak{a}$, où T est un Y-schéma, et si $t_1, t_2 : T \longrightarrow X$ sont deux Y-points de X qui coïncident modulo $\mathfrak{a}$ (i.e. tels que $t_1 i = t_2 i = t_0 : T_0 \longrightarrow X$), alors il existe un unique Y-morphisme $h : T \longrightarrow Z_1$ tel que $p_1 h = t_1$ et $p_2 h = t_2$; de plus, si $t_1^*, t_2^* : \mathcal{O}_X \to t_{0*}\mathcal{O}_T$ [3] sont les homomorphismes de faisceaux d'anneaux associés à t_1 et t_2, $t_2^* - t_1^*$ est une Y-dérivation de $\mathcal{O}_X$ à valeurs dans $t_{0*}\mathfrak{a}$, telle que

$$(t_2^* - t_1^*)(s) = h^*(ds) \tag{1.2.6}$$

pour toute section locale s de $\mathcal{O}_X$, où $h^* : \Omega^1_{X/Y} \longrightarrow t_0^*\mathfrak{a}$ est l'homomophisme de $\mathcal{O}_X$-modules induit par h (sur les faisceaux conormaux correspondants, de X dans Z_1 et T_0 dans T). Si f est un morphisme de schémas affines, correspondant à un

[3] Rappelons que T et T_0 ont même espace sous-jacent.