VARIATIONS DE STRUCTURES DE HODGE, VARIÉTÉS DE CALABI-YAU ET SYMÉTRIE MIROIR

José Bertin, Chris Peters
Université de Grenoble I
Institut Fourier, BP 74
38402 Saint-Martin d'Hères, France

0. Introduction

L'objet de ces notes est de proposer une introduction assez détaillée à la partie la plus élémentaire de la théorie des variations de structures de Hodge avec des indications brèves sur les développements les plus récents. Pour motiver et illustrer cette étude, il nous a semblé pertinent d'exposer les grandes lignes d'un chapitre excitant et nouveau de géométrie algébrique : les variétés de Calabi-Yau et la symétrie miroir, en mettant surtout l'accent sur les questions qui véritablement relèvent des structures de Hodge et leurs variations. Cette théorie issue des réflexions d'un groupe de physiciens, conduit entre autre choses à des prédictions remarquables sur le nombre de courbes rationnelles, et même de tout genre, tracées sur une classe de variétés de dimension trois.

Le texte s'adresse en priorité à des étudiants, ou mathématiciens non spécialistes, mais qui cependant ont une certaine familiarité avec les techniques usuelles de la géométrie algébrique ou analytique complexe. Cela est particulièrement clair dans le premier chapitre où le cadre retenu, assez général, est alternativement celui des schémas et des variétés analytiques. Le langage de base utilisé pour formuler et prouver les résultats est naturellement celui de l'algèbre homologique, à partir des notions de cohomologie et d'hypercohomologie des faisceaux. Le lecteur trouvera dans le texte ci-joint d'Illusie [Ill] un exposé succinct mais largement suffisant. Il doit être signalé au lecteur que plusieurs excellents textes existent dans la littérature qui proposent une introduction à un aspect ou à un autre de la théorie des variations de structure de Hodge, citons par exemple les plus classiques [Co-G], [G-S], [P-S] et, plus récemment [B-Z], avec tout naturellement l'article fondamental de Schmid [S]. Nous espérons cependant que parallèlement à ces textes, nos notes pourront à l'occasion rendre quelques services. Sur le thème de la seconde partie, beaucoup de textes traitant du sujet, écrits dans le “style de la physique” sont d'un accès malaisé pour un mathématicien. On peut souhaiter de même que nos notes apportent un complément utile aux textes récents de M. Kontsevich [K1], [K2], D. Morrison [Mor 1] et C. Voisin [V] qui traitent aussi des aspects mathématiques du sujet.

Le texte est divisé en deux parties non indépendantes. La partie I consacrée aux développements généraux sur les variations de Structures de Hodge (chapitre 1 à 6) et la partie II qui poursuit sur les variétés de Calabi-Yau et la symétrie miroir. Pour aider le lecteur nous avons fait débuter chaque chapitre par un court résumé. Situons maintenant le contenu de ces notes dans leur contexte. Les variations de structures de Hodge apparaissent naturellement lorsque, au lieu d'avoir une variété algébrique, par exemple donnée par une équation homogène (hypersurface) $\{f = 0\}$, on considère une famille de variétés algébriques, par exemple lorsque l'équation dépend de paramètres (variables additionnelles). Précisément, dans ces notes, une *famille* sera une application holomorphe $f : X \to S$ telle que $X \subset \mathbb{P}^n \times S$ et f, la restriction à X de la projection sur S, étant partout de rang maximal. Les fibres $X_s = f^{-1}(s)$ sont des variétés projectives lisses, et on sait par le texte ci-joint de Demailly [Dem] que chaque espace vectoriel $H^w(X_s, \mathbb{C})$ porte une structure de Hodge de poids w, c'est le résultat fondamental de la théorie de Hodge. On sait aussi (loc. cit.§10) que $H^w(X_s, \mathbb{C})$ est la fibre d'un fibré vectoriel holomorphe $\mathcal{H}$ sur S ; il est donc naturel et fondamental d'étudier le comportement de la structure de Hodge définie sur $H^w(X_s, \mathbb{C})$, lorsque $s \in S$ varie, c'est-à-dire globalement sur S. D'une autre manière, si on pense à la classe $[\omega(s)]$ d'une forme différentielle fermée $\omega(s)$ comme dépendant du paramètre s, et si γ est un cycle de dimension (réelle) w dans une fibre X_{s_0}, qu'on peut voir comme un cycle sur toute fibre voisine X_s de X_{s_0} du fait de la trivialité locale topologique de la famille, il est alors possible de considérer la période de ω, c'est-à-dire la fonction $\int_\gamma \omega$. Pour étudier la variation des périodes par rapport à s, il est nécessaire de dériver : $\frac{d}{ds}\left(\int_\gamma \omega\right)$. Le cycle étant fixé, on veut dériver sous le signe somme. Cela sera justifié par l'existence d'une connexion, la connexion de Gauss-Manin qui conduira à la règle de dérivation :

$$d/ds \int_\gamma \omega(s) = \int_\gamma \nabla_{\frac{d}{ds}} \omega(s)$$

$\nabla_{\frac{d}{ds}}$ étant la dérivée covariante dans la direction de $\frac{d}{ds}$.

Dans le §10 de [Dem], il est prouvé aussi que le fibré $\mathcal{H}^w$ est le fibré associé au système localement constant $\bigcup_{s\in S} H^w(X_s, \mathbb{C})$, il est donc plat ; la connexion plate résultante est la *connexion de Gauss-Manin*. De plus, si au lieu des sous-espaces $H^{p,q}(X_s)$, on considère les sous-espaces $F^p H^w(S_s, \mathbb{C}) = \oplus_{r\geqslant p} H^{r,w-r}(X_s)$ de la filtration de Hodge, alors ces sous-espaces sont les fibres d'un sous-fibré holomorphe $\mathcal{F}^p$ de $\mathcal{H}^w$, définissant la filtration $\mathcal{F}^\bullet$ de $\mathcal{H}^w$. Le fibré $\mathcal{H}^w$ équipé de cette *filtration de Hodge* et de la connexion de Gauss-Manin est l'exemple fondamental d'une *variation de structures de Hodge*, notion introduite par Griffiths dans [Grif1].

Ainsi, dans le paragraphe 1 nous donnons la construction détaillée des fibrés de Hodge, comme conséquence de la dégénérescence de la suite spectrale de Hodge vers De Rham (voir le texte ci-joint d'Illusie) dans le cadre général des variétés algébriques non nécessairement complexes.

Dans le §2 nous construisons la connexion de Gauss-Manin et nous prouvons la propriété de transversalité. L'exposition de ce paragraphe est assez détaillée car le théorème de transversalité de Griffiths est le point de départ central de toute la théorie, comme on pourra s'en convaincre en parcourant la seconde partie. Les manipulations sur les complexes de De Rham et leurs résolutions sont en fait proches de ce qui est fait dans [Ill]. Nous prouvons aussi que la connexion de Gauss-Manin est algébrique, suivant en cela les calculs de Katz et Oda [K-O]. C'est cet aspect qui est devenu extrêmement important dans les développements récents (§6).

Dans le §3, on introduit les *domaines de périodes de Griffiths* qui sont des espaces de paramètres pour les structures de Hodge polarisées de poids et nombres de Hodge fixés. Si $f : X \to S$ est une famille, on définit, quitte à se restreindre à la cohomologie primitive, l'application des périodes $p : S \to D$ (si S n'est pas simplement connexe il faut remplacer S par son revêtement universel) ; on traduit dans ce cadre la propriété de tranversalité. L'étude de la différentielle de l'application des périodes conduit naturellement à la notion de *Variation Infinitésimale de Structures de Hodge* introduite dans [C-G-G-H] et traitée à la fin du §3. Cette notion est nécessaire pour justifier certains points fondamentaux du chapitre II.

Revenons à la situation considérée au début, celle d'une famille de variétés paramétrée par une base compacte. Dans cette situation on ne pourra éviter la présence de fibres singulières ; il est donc naturel d'étudier le comportement de la variation autour du lieu des fibres singulières. Pour simplifier on suppose que la base est le disque unité Δ, que $f : X \to \Delta$ est de rang maximal au dessus des points de $\Delta^* = \Delta \setminus \{0\}$. On dit que f est une *dégénérescence à un paramètre*. Tourner une fois autour de 0 induit l'action de *monodromie locale* $T : H^w(X_s) \to H^w(X_s)$, $s \in \Delta$. Cette action préserve la structure entière, la polarisation et la filtration de Hodge. Le théorème de la monodromie locale de [La] et [S] dit que T est quasi-unipotente, c'est-à-dire, pour $k, m \in \mathbb{N}$ convenables, $(T^k - \mathbb{1})^m = 0$. Un autre résultat important est le théorème local des cycles invariants de [Cl] qui dit qu'une classe $\alpha \in H^w(X_s)$ est T-invariante si et seulement si α est la restriction à X_s d'une classe définie sur X tout entier. La démonstration de ce théorème nécessite la construction d'une filtration de Hodge sur $H^w(X_s)$ différente de la filtration classique et qui est mieux adaptée au passage à la limite quand s tend vers zéro, la *filtration de Hodge limite*. L'opérateur de monodromie T, lui aussi induit une filtration, celle des poids, et jointe à la filtration limite on obtient une structure plus compliquée appelée : *structure de Hodge mixte* sur $H^w(X_s)$, ou encore la *structure limite*. Dans le §4 nous exposerons brièvement la notion de structure de Hodge mixte et les résultats fondamentaux de Deligne [Del4] et [Del5] sur l'existence d'une telle structure sur les variétés algébriques qui ne sont pas nécessairement compactes ni lisses. Ensuite nous donnerons une description de la structure limite en résumant quelques résultats importants qui se trouvent dans les articles [S] et [Cl]. Le §4 se termine par une description des faisceaux des cycles proches et évanescents qui est essentielle pour comprendre le travail de Saito [Sa1] sur les modules de Hodge, travail très partiellement esquissé dans le §6.

Dans le §5 nous résumons quelques résultats récents de Simpson sur les *fibrés de Higgs*, qui forment dans un certain sens une généralisation des variations de structures de Hodge et qui lui ont permis d'obtenir des conséquences surprenantes concernant les groupes *kählériens*, c'est-à-dire les groupes qui peuvent apparaître comme les groupes fondamentaux d'une variété kählérienne compacte.

La notion compliquée de *module de Hodge* joue un rôle central dans les développements récents de la théorie de Hodge. Elle nécessite l'introduction des $\mathcal{D}$-modules, faisceaux pervers et une compréhension de la correspondance de Riemann-Hilbert, qui décrit le lien entre ces deux notions. Dans le §6 nous décrivons brièvement ces notions ainsi qu'une application importante à la cohomologie d'intersection, introduite par Goresky et MacPherson dans [G-M] : le groupe de cohomologie d'intersection $IH^w(X)$ d'une variété algébrique complexe X porte une structure de Hodge pure de poids w.

Décrivons le contenu de la partie II. Comme dit au début, il y a peu de temps que les physiciens travaillant en physique quantique ont mis en évidence un nouveau phénomène de dualité. Les conséquences mathématiques, encore largement au stade des spéculations, sont fascinantes. Les exposés [F-G] et [G] décrivent en détail dans le langage de la physique ce cercle d'idées. Parmi les diverses manifestations de dualité, la symétrie miroir a attiré l'attention des géomètres algébristes, principalement à la suite du travail d'un groupe de physiciens [C-O-G-P], traduit partiellement en langage mathématique par D. Morrison [Mor1]. Le cadre de cette symétrie est celui *des variétés de Calabi-Yau* (§7). Une conséquence naïve (vérifiée par l'observation) est que ces variétés sont distribuées par paires, une paire étant formée de la variété miroir de l'autre, et que le tableau des nombres de Hodge de l'une se déduit du tableau de l'autre par une rotation d'un quart de tour. La symétrie prédit naturellement beaucoup plus, par exemple que les nombres de courbes rationnelles de "degré" fixé sur l'une est déductible d'informations fournies par la variation de la structure complexe de l'autre. Pour mettre en forme partiellement cette assertion, on étudie le comportement des périodes des 3-formes holomorphes lorsque la structure complexe varie. On détermine l'équation différentielle naturelle satisfaite par ses périodes, qui est *l'équation de Picard-Fuchs*. Cet aspect est traité en détail, avec au préalable la description donnée par Griffiths de la cohomologie d'une hypersurface de $\mathbb{P}^n$. Les détails sont dans le §8, et suivent en partie l'exposé de [C-G]. Les calculs sont détaillés car c'est essentiellement ici qu'on peut tout calculer. Notons que le contexte géométrique (différentiel) a été formalisé par les physiciens sous le nom de "géométrie spéciale" [Str].

Dans les §9 et 10, on traite l'exemple célèbre depuis [C-O-G-P] de l'hypersurface quintique de $\mathbb{P}^4$ et de sa variété miroir. Les méthodes de la partie I interviennent lors de la discussion de l'accouplement de Yukawa. Expliquons brièvement de quoi il s'agit. Soit $f : X \to \Delta$ une dégénérescence de variétés de Calabi-Yau de dimension 3, soit $\omega(s)$ une 3-forme holomorphe relative ($s \in \Delta$) et soit enfin $\nabla_{\frac{d}{ds}} : \mathcal{H}^3 \to \mathcal{H}^3$ la dérivée covariante induite par la connexion de Gauss-Manin. Il résulte de la propriété de transversalité que $\nabla_{\frac{d}{ds}}\omega(s)$ est une somme de termes de type $(3,0)$ et $(2,1)$ et donc $\int_{X_s} \omega(s) \wedge \nabla_{\frac{d}{ds}}\omega(s) = 0 = \int_{X_s} \omega(s) \wedge \nabla^2_{\frac{d}{ds}}\omega(s)$. Par contre reste la fonction non-nulle :

$$\kappa_{sss} = \int_{X_s} \omega(s) \wedge \nabla^3_{\frac{d}{ds}}\omega(s)$$

qui est *l'accouplement de Yukawa*.

Cette fonction satisfait à une équation différentielle liée à l'équation de Picard-Fuchs. L'analyse cruciale ici est celle du comportement de κ_{sss} lorsque s tend vers zéro. On verra pour justifier l'existence d'un paramètre canonique qu'il est nécessaire de s'appuyer sur l'existence d'une structure de Hodge limite, argument essentiellement dû à Morrison [Mor1]. Le paramètre canonique auquel on vient de faire allusion est de la forme $q = \exp(2\pi i\tau)$ où τ est le quotient de deux périodes convenables. Cela étant fait, on peut définir le q-développement de κ_{sss} pour $s \to 0$ et observer que ce développement fait apparaître des coefficients *entiers positifs*, qui selon le principe de symétrie conduisent aux nombres de courbes rationnelles de degré donné sur l'hypersurface quintique, nombres inabordables par la géométrie algébrique sauf en degré petit. Cet exemple montre clairement qu'en liaison avec le phénomène de symétrie miroir se posent à côté de nombreuses questions géométriques, et de très intéressants problèmes arithmétiques. Ces questions sont esquissées dans [L-Y].

Dans le paragraphe final (§11) nous discuterons, selon une idée de Deligne [Del6], une approche possible de la symétrie miroir en termes d'une dualité entre certaines variations de structures de Hodge.

Terminons cette introduction en donnant quelques indications bibliographiques qui peuvent aider le lecteur à pénétrer ce vaste domaine.

- L'article [Grif3] peut être considéré comme le premier article de synthèse. Il contient beaucoup d'exemples et des calculs concrets ; les problèmes énoncés dans cet article ont inspiré beaucoup de monde et bien que maintenant partiellement résolus, il reste encore "des choses à faire".
- Ensuite dans [G-S] on trouve entre autre une introduction relativement élémentaire à la théorie de Hodge mixte appliquée aux questions de dégénérescences.
- L'article [P-S] explique comment on peut utiliser les variations infinitésimales pour résoudre certains cas du *problème de Torelli* : une variété est-elle déterminée (à isomorphisme près) par la structure de Hodge sur la cohomologie (entière) ? On trouve, là aussi, une introduction aux domaines de périodes et aux espaces des modules.
- La monographie [Grif4] est une très bonne introduction au sujet, elle contient des articles assez détaillés sur les variations de structures de Hodge (aussi sur les VSH infinitésimales). Y figure aussi une discussion des propriétés de la courbure de la métrique naturelle d'un domaine de périodes, résultat qui est utilisé dans le §4. On notera que l'article fondamental [S] de Schmid contient des paragraphes pouvant servir d'introduction efficace à certains aspects de la théorie de Griffiths.
- L'article [B-Z] se veut une synthèse des travaux récents sur la théorie de Hodge. On y trouvera plus de détails sur les matières des §4–6. Les progrès récents sur le problème de Torelli (voir ci-dessus) par contre ne sont pas traités du tout. Pour les $\mathcal{D}$-modules le lecteur consultera les articles dans [Bo] et pour la cohomologie d'intersection et la relation avec les $\mathcal{D}$-modules on lira le joli livre [Ki].
- Comme indiqué plus haut, l'article [V] peut servir comme introduction au problème de symétrie miroir. On trouve ici non seulement un traitement du coté mathématique mais aussi une brève introduction à l'origine "physique" de la conjecture. Voir aussi l'article [F-V] et les livres [H] et [Y2] pour des indications sur les aspects physiques. Signalons pour terminer la référence [B-C-O-V] dans la littérature physique, que le lecteur pourra consulter pour des perspectives exaltantes.

Nous voudrions remercier tous ceux qui nous ont aidé pour rendre cet exposé plus lisible ; en particulier Jim Carlson, Eduardo Cattani, Bernard Malgrange et Joseph Steenbrink.

Remarques et références supplémentaires pour la seconde édition

- **Depuis la première édition de cet ouvrage de nombreux textes et monographies sont apparus traitant l'un ou l'autre des thèmes du présent texte. Pour la théorie de Hodge, citons le livre "Period Mappings and Period Domains" [C-MS-P] dans lequel le lecteur trouvera de nombreux détails sur les travaux de Griffiths concernant l'application des périodes comme traitée ici dans la partie I.**

La nouvelle édition de cette monographie contient aussi des résultats récents sur les fibrés de Higgs ainsi que des applications aux variétés de Shimura. Par exemple mentionnons un résultat frappant établi par M. Green, Ph. Griffiths et M. Kerr : il y a une factorisation "arithmétique" de l'application de périodes (voir le livre [G-G-K]). Cette factorisation fait le lien naturel entre les périodes et des groupes de Mumford-Tate et, dans la situation de poids 1, avec les variétés de Shimura.

- **Sur la théorie de Hodge mixte on consultera le texte exhaustif "Mixed Hodge Structures" [P-S2].**