THÉORIE DE HODGE L^2 ET THÉORÈMES D'ANNULATION

Jean-Pierre Demailly
Université de Grenoble I
Institut Fourier, BP 74
38402 Saint-Martin d'Hères, France

0. Introduction

L'objet de ces notes est de décrire deux applications fondamentales des techniques hilbertiennes L^2 à la géométrie analytique ou algébrique : la théorie de Hodge d'une part, la théorie des estimations L^2 pour l'opérateur $\overline{\partial}$ d'autre part. Le point de vue adopté ici sera essentiellement analytique.

La première partie est consacrée à la théorie de Hodge et se veut avant tout introductive. Le lecteur ne trouvera donc ici que les aspects les plus élémentaires, dus pour la plupart à W.V.D. Hodge lui-même [Hod41] ou à A. Weil [Wei57]. La théorie de Hodge, dans le sens premier conçu par son créateur, consiste en l'étude de la cohomologie des variétés riemanniennes ou kählériennes, à partir d'une description des formes harmoniques et de leurs propriétés. Nous renvoyons aux textes de J. Bertin-Ch. Peters [BePe95] et L. Illusie [Ill95] pour une présentation d'aspects et d'applications plus avancés (variations de structures de Hodge, application des périodes, théorie de Hodge en caractéristique > 0 ...). Considérons une variété riemannienne X et un fibré euclidien ou hermitien E sur X. On suppose que E est muni d'une connexion D compatible avec la métrique : une connexion est par définition un opérateur de dérivation analogue à la différentiation extérieure, agissant sur les formes de degré quelconque à valeurs dans E, et satisfaisant la règle de Leibniz pour le produit extérieur. L'*opérateur de Laplace-Beltrami* associé est l'opérateur différentiel autoadjoint du second ordre $\Delta_E = D_E D_E^\star + D_E^\star D_E$, où $D_E^\star$ est l'adjoint hilbertien de D_E. On vérifie aisément que Δ_E est un *opérateur elliptique*. Le théorème de finitude pour les opérateurs elliptiques montre alors que l'espace $\mathcal{H}^q(X,E)$ des q-formes harmoniques à valeurs dans E est de dimension finie si X est compacte (on dit qu'une forme u est harmonique si $\Delta_E u = 0$). Si on suppose de plus que la connexion est telle que $D_E^2 = 0$, l'opérateur D_E agissant sur les formes de tous degrés définit un complexe appelé *complexe de De Rham* à valeurs dans le système local de coefficients défini par E. Les groupes de cohomologie correspondants seront notés $H^q_{\mathrm{DR}}(X,E)$. L'observation fondamentale de la théorie de Hodge est que toute classe de cohomologie contient un unique représentant harmonique dès lors que X est compacte. Il en résulte alors un isomorphisme, dit *isomorphisme de Hodge*

$$H^q_{\mathrm{DR}}(X,E) \simeq \mathcal{H}^q_{\mathrm{DR}}(X,E). \tag{0.1}$$

Lorsque la variété X et le fibré E sont holomorphes, il existe une connexion unique D_E appelée *connexion de Chern*, compatible avec la métrique hermitienne de E et ayant les propriétés suivantes : D_E se scinde en la somme $D_E = D'_E + D''_E$ d'une connexion D'_E de type $(1,0)$ et d'une connexion D''_E de type $(0,1)$, telles que $D'^2_E = D''^2_E = 0$ et $D'_E D''_E + D''_E D'_E = \Theta(E)$ (tenseur de courbure de Chern du fibré). L'opérateur D''_E agissant sur les formes de bidegré (p,q) définit alors pour p fixé un complexe appelé *complexe de Dolbeault*. Lorsque X est compacte, les groupes de cohomologie de Dolbeault $H^{p,q}(X,E)$ satisfont un isomorphisme de Hodge analogue à (0.1), à savoir

$$H^{p,q}(X,E) \simeq \mathcal{H}^{p,q}(X,E), \tag{0.2}$$

où $\mathcal{H}^{p,q}(X,E)$ désigne l'espace des (p,q)-formes harmoniques à valeurs dans E, relativement au Laplacien anti-holomorphe $\Delta''_E = D''_E D''^\star_E + D''^\star_E D''_E$. En utilisant ce dernier résultat, on démontre facilement le *théorème de dualité de Serre*

$$H^{p,q}(X,E)^\star \simeq H^{n-p,n-q}(X,E^\star), \qquad n = \dim_{\mathbb{C}} X, \tag{0.3}$$

qui est le pendant complexe du théorème de dualité de Poincaré. Le théorème central de la théorie de Hodge concerne les variétés kählériennes compactes : une variété hermitienne (X,ω) est dite *kählérienne* si la $(1,1)$-forme hermitienne $\omega = \mathrm{i}\sum_{j,k}\omega_{jk}dz_j \wedge d\overline{z}_k$ est telle que $d\omega = 0$. Un exemple fondamental de variété kählérienne compacte est donné par les variétés algébriques projectives. Si X est kählérienne compacte et si E est un système local de coefficients sur X, le *théorème de décomposition de Hodge* affirme que

$$H^k_{\mathrm{DR}}(X,E) = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(X,E) \qquad \text{(décomposition de Hodge)} \tag{0.4}$$

$$\overline{H^{p,q}(X,E)} \simeq H^{q,p}(X,E^\star), \qquad \text{(symétrie de Hodge).} \tag{0.5}$$

Le caractère intrinsèque de la décomposition sera démontré ici de manière quelque peu originale, via l'utilisation des groupes de cohomologie de Bott-Chern (groupes de $\partial\overline{\partial}$-cohomologie). Il découle de ces résultats que les nombres de Hodge $h^{p,q} = \dim_{\mathbb{C}} H^{p,q}(X,\mathbb{C})$ vérifient la propriété de symétrie $h^{p,q} = h^{q,p} = h^{n-p,n-q} = h^{n-q,n-p}$, et qu'ils sont liés aux nombres de Betti $b_k = \dim_{\mathbb{C}} H^k_{\mathrm{DR}}(X,\mathbb{C})$ par la relation $b_k = \sum_{p+q=k} h^{p,q}$. Un certain nombre d'autres propriétés cohomologiques remarquables des variétés kählériennes compactes s'obtient au moyen de la décomposition primitive et du théorème de Lefschetz difficile (lequel résulte à son tour de l'existence d'une action de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ sur les formes harmoniques). Ces résultats permettent de décrire de façon précise la structure du groupe de Picard $\mathrm{Pic}(X) = H^1(X,\mathcal{O}^\star)$ dans le cas kählérien. Dans un contexte plus général, nous explicitons la suite spectrale de Hodge-Frölicher (suite spectrale reliant la cohomologie de Dolbeault à la cohomologie de De Rham), et nous montrons comment on peut utiliser cette suite spectrale pour obtenir quelques résultats généraux sur les nombres de Hodge $h^{p,q}$ des variétés complexes compactes. Finalement, nous établissons la semi-continuité des dimensions des groupes de cohomologie $H^q(X_t,E_t)$ sur les fibres d'une fibration holomorphe propre et lisse $\mathcal{X} \to S$ (résultat dû à Kodaira-Spencer), et nous en déduisons que les nombres de Hodge $h^{p,q}(X_t)$ sont constants si les fibres X_t sont kählériennes (invariance des $h^{p,q}$ par déformations) ; le caractère holomorphe de la filtration de Hodge $F^pH^k(X_t,\mathbb{C}) = \bigoplus_{r\geqslant p} H^{r,k-r}(X_t,\mathbb{C})$ relativement à la connexion de Gauss-Manin est démontré au moyen du théorème de cohérence des images directes, appliqué au complexe de De Rham relatif $\Omega^\bullet_{\mathcal{X}/S}$ de $\mathcal{X} \to S$.

Dans la seconde partie, après quelques rappels sur les notions de positivité et pseudoconvexité mises en jeu, nous établissons l'*identité de Bochner-Kodaira-Nakano* reliant les Laplaciens Δ'_E et Δ''_E. L'identité en question fournit une expression explicite de la différence $\Delta''_E - \Delta'_E$ en termes de la courbure $\Theta(E)$ du fibré. Sous des hypothèses adéquates (faible pseudoconvexité de X, positivité de la courbure de E), on aboutit à une estimation a priori

$$\|D''_E u\|^2 + \|D''^{\star}_E u\|^2 \geqslant \int_X \lambda(z)|u|^2 dV(z)$$

où λ est une fonction positive dépendant des valeurs propres de courbure. L'inégalité est ici valide pour toute forme u de bidegré (n,q), $n = \dim X$, $q \geqslant 1$, à valeurs dans E, appartenant aux domaines hilbertiens u de D''_E et $D''^{\star}_E$. Par un argument de dualité hilbertien, on déduit de là le théorème fondamental suivant, dû essentiellement à Hörmander [Hör65] et Andreotti-Vesentini [AV65].

0.6. Théorème. *Soit (X,ω) une variété kählérienne,* $\dim X = n$. *Supposons que X soit faiblement pseudoconvexe. Soit E un fibré en droites hermitien et soient*

$$\gamma_1(x) \leqslant \cdots \leqslant \gamma_n(x)$$

les valeurs propres de la forme de courbure $\mathrm{i}\,\Theta(E)$ *par rapport à la métrique ω en tout point. Supposons que la courbure soit semi-positive, i.e. $\gamma_1 \geqslant 0$ partout. Alors pour toute forme $g \in L^2(X, \Lambda^{n,q}T^\star_X \otimes E)$ telle que*

$$D''_E g = 0 \quad et \qquad \int_X (\gamma_1 + \cdots + \gamma_q)^{-1}|g|^2\, dV_\omega < +\infty,$$

il existe $f \in L^2(X, \Lambda^{n,q-1}T^\star_X \otimes E)$ telle que

$$D''_E f = g \quad et \qquad \int_X |f|^2\, dV_\omega \leqslant \int_X (\gamma_1 + \cdots + \gamma_q)^{-1}|g|^2\, dV_\omega.$$

Une observation importante est que le théorème ci-dessus reste encore valable lorsque la métrique h de E présente des singularités. La métrique h est alors donnée dans chaque carte par un poids $\mathrm{e}^{-2\varphi}$ associé à une fonction φ plurisousharmonique (par définition φ est psh si la matrice des dérivées secondes $(\partial^2\varphi/\partial z_j\partial\overline{z}_k)$, calculée au sens des distributions, est semi-positive en tout point). Compte tenu du Théorème (0.6), il est naturel d'introduire le *faisceau d'idéaux multiplicateur* $\mathcal{I}(h) = \mathcal{I}(\varphi)$, constitué des germes de fonctions holomorphes $f \in \mathcal{O}_{X,x}$ telles que $\int_V |f|^2\mathrm{e}^{-2\varphi}$ converge dans un voisinage V de x assez petit. Un résultat récent de A. Nadel [Nad89] garantit que $\mathcal{I}(\varphi)$ est toujours un faisceau analytique cohérent, quelles que soient les singularités de φ. Dans ce contexte, on déduit de (0.6) la version qualitative suivante, concernant la cohomologie à valeurs dans le faisceau cohérent $\mathcal{O}(K_X \otimes E) \otimes \mathcal{I}(h)$ ($K_X = \Lambda^n T^\star_X$ étant le *fibré canonique* de X).

0.7. Théorème d'annulation de Nadel ([Nad89], [Dem93b]). *Soit (X,ω) une variété kählérienne faiblement pseudoconvexe, et soit E un fibré en droites holomorphe sur X muni d'une métrique hermitienne h singulière de poids φ. Supposons qu'il existe une fonction continue positive ε sur X telle que la courbure satisfasse l'inégalité* $\mathrm{i}\,\Theta_h(E) \geqslant \varepsilon\omega$ *au sens des courants. Alors*

$$H^q\big(X, \mathcal{O}(K_X \otimes E) \otimes \mathcal{I}(h)\big) = 0 \qquad pour\ tout\ q \geqslant 1.$$

En dépit de la relative simplicité des techniques mises en jeu, il s'agit là d'un théorème extrêmement puissant, qui contient à lui seul une bonne partie des résultats les plus fondamentaux de la géométrie analytique ou algébrique. Le théorème (0.7) contient ainsi la solution du problème de Levi (équivalence de la convexité holomorphe et de la pseudoconvexité), les théorèmes d'annulation de Kodaira-Serre, Kodaira-Akizuki-Nakano et de Kawamata-Viehweg pour les variétés algébriques projectives, de même que le théorème de plongement de Kodaira caractérisant ces variétés parmi les variétés complexes compactes. Par son caractère intrinsèque, l'énoncé "analytique" du théorème de Nadel se révèle utile même pour des applications purement algébriques (la version algébrique du théorème, connue sous le nom de théorème d'annulation de Kawamata-Viehweg, utilise la résolution des singularités et ne donne pas une description aussi nette du faisceau multiplicateur $\mathcal{I}(h)$). Dans un travail récent [Siu96], Y.T. Siu a montré le résultat remarquable suivant, en utilisant seulement la formule de Riemann-Roch et un argument de récurrence Noethérienne pour les faisceaux multiplicateurs. La technique est décrite au § 16 (avec quelques améliorations mises au point dans [Dem96]).

0.8. Théorème ([Siu96], [Dem96])**.** *Soit X une variété projective et L un fibré en droites ample (i.e. à courbure positive) sur X. Alors le fibré $K_X^{\otimes 2}\otimes L^{\otimes m}$ est très ample pour $m \geqslant m_0(n) = 2 + \binom{3n+1}{n}$, où $n = \dim X$.*

L'importance d'avoir une borne effective pour l'entier $m_0(n)$ est qu'on peut ainsi obtenir des plongements de la variété X dans l'espace projectif, avec un contrôle précis du degré du plongement. Il résulte de là une démonstration assez simple d'un théorème de finitude important, à savoir le *"grand théorème de Matsusaka"* (cf. [Mat72], [KoM83], [Siu93], [Dem96]) :

0.9. Grand théorème de Matsusaka. *Soit X une variété projective et L un fibré en droites ample sur X. Il existe une borne $m_1 = m_1(n, L^n, K_X \cdot L^{n-1})$ explicite ne dépendant que de la dimension $n = \dim X$ et des deux premiers coefficients du polynôme de Hilbert de L, telle que mL soit très ample pour $m \geqslant m_1$.*

De ce théorème, on déduit facilement de nombreux résultats de finitude, en particulier le fait qu'il existe seulement un nombre fini de familles de déformations de variétés projectives polarisées (X, L), lorsque L est un fibré ample dont les nombres d'intersection L^n et $K_X \cdot L^{n-1}$ sont donnés.

Nous concluons ce chapitre avec une version généralisée du thórème de Lefschetz difficile, valable pour la cohomologie à valeurs dans un fibré en droites pseudo-effectif.

0.10. Théorème de Lefschetz généralisé. *Soit (X, ω) une variété kählérienne compacte n-dimensionnelle, et (L, h) un fibré en droites pseudo-effectif sur X, c'est-à-dire admettant une courbure $\Theta_h(L) \geqslant 0$ au sens des courants. On note $\mathcal{I}(h)$ le faisceau d'idéaux multiplicateur associé. Alors l'opérateur de Lefschetz $\omega^q \wedge \bullet$ induit un morphisme surjectif*

$$\Phi^q_{\omega,h} : H^0(X, \Omega_X^{n-q} \otimes L \otimes \mathcal{I}(h)) \longrightarrow H^q(X, \Omega_X^n \otimes L \otimes \mathcal{I}(h)).$$

PARTIE I : THÉORIE DE HODGE L^2

1. Fibrés vectoriels, connexions et courbure

Le but de cette section est de rappeler quelques définitions de base de géométrie différentielle hermitienne liées aux concepts de connexion, courbure et première classe de Chern d'un fibré en droites.

1.A. Cohomologie de Dolbeault et cohomologie des faisceaux

Soit X une variété $\mathbb{C}$-analytique de dimension n. Nous désignons par $\Lambda^{p,q}T_X^\star$ le fibré des formes différentielles de bidegré (p,q) sur X, i.e., les formes différentielles qui peuvent s'écrire

$$u = \sum_{|I|=p,\,|J|=q} u_{I,J} dz_I \wedge d\overline{z}_J, \qquad dz_I := dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p}, \quad d\overline{z}_J := d\overline{z}_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\overline{z}_{j_q},$$

où $(z_1, \ldots, z_n)$ désignent des coordonnées locales holomorphes, et où $I = (i_1, \ldots, i_p)$ et $J = (j_1, \ldots, j_q)$ sont des multi-indices (suites croissantes d'entiers de l'intervalle $[1, \ldots, n]$, de longueurs $|I| = p$, $|J| = q$). Soit $\mathcal{A}^{p,q}$ le faisceau des germes de formes différentielles de bidegré (p,q) à valeurs complexes et à coefficients C^∞. Rappelons que la différentielle extérieure d se décompose en $d = d' + d''$ où

$$d'u = \sum_{|I|=p,\,|J|=q, 1\leqslant k\leqslant n} \frac{\partial u_{I,J}}{\partial z_k} dz_k \wedge dz_I \wedge d\overline{z}_J,$$

$$d''u = \sum_{|I|=p,\,|J|=q, 1\leqslant k\leqslant n} \frac{\partial u_{I,J}}{\partial \overline{z}_k} d\overline{z}_k \wedge dz_I \wedge d\overline{z}_J$$

sont de type $(p+1,q)$, $(p,q+1)$ respectivement. Le lemme bien-connu de Dolbeault-Grothendieck affirme que toute forme d''-fermée de type (p,q) avec $q > 0$ est localement d''-exacte (c'est l'analogue pour d'' du lemme usuel de Poincaré pour d, voir par exemple [Hör66]). En d'autres termes, le complexe de faisceaux $(\mathcal{A}^{p,\bullet}, d'')$ est exact en degré $q > 0$; en degré $q = 0$, $\operatorname{Ker} d''$ est le faisceau Ω_X^p des germes de formes holomorphes de degré p sur X.

Plus généralement, si E est un fibré vectoriel holomorphe de rang r sur X, il existe un opérateur d'' naturel agissant sur l'espace $C^\infty(X, \Lambda^{p,q}T_X^\star \otimes E)$ des (p,q)-formes C^∞ à valeurs dans E. En effet, si $s = \sum_{1\leqslant\lambda\leqslant r} s_\lambda e_\lambda$ est une (p,q)-forme exprimée en termes d'un repère holomorphe local de E, on peut définir $d''s := \sum d''s_\lambda \otimes e_\lambda$, en observant que les matrices de transition mises en jeu dans des changements de repères holomorphes sont holomorphes, ce qui n'affecte pas le calcul de d''. Il est alors clair que le lemme de Dolbeault-Grothendieck est encore valable pour des formes à valeurs dans E. Pour tout entier $p = 0, 1, \ldots, n$, les *groupes de cohomologie de Dolbeault* $H^{p,q}(X,E)$ sont définis comme étant les groupes de cohomologie du complexe des formes globales de type (p,q) (gradué par q) :

$$H^{p,q}(X,E) = H^q\big(C^\infty(X, \Lambda^{p,\bullet}T_X^\star \otimes E)\big). \tag{1.1}$$