VARIÉTÉS RATIONNELLEMENT CONNEXES : ASPECTS GÉOMÉTRIQUES ET ARITHMÉTIQUES

L. Bonavero, B. Hassett,
J. M. Starr, O. Wittenberg

Panoramas et Synthèses

Numéro 31 2010

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

Panoramas & Synthèses
31, 2010, p. 1–8

INTRODUCTION

par

Jean-Louis Colliot-Thélène

Le thème commun de ce volume est l'étude des points rationnels des variétés algébriques dont la géométrie est relativement simple, c'est-à-dire qui peuvent prétendre à être des analogues, en dimension supérieure, des courbes de genre zéro, autrement dit des coniques.

Pour ces dernières, rappelons quelques propriétés :

– Toute conique sur un corps fini possède un point rationnel. Pour les corps premiers $\mathbf{F}_p$, ceci est dû à Euler (1754).

– Toute conique sur un corps de fonctions d'une variable sur le corps des complexes a un point rationnel. Ce résultat est dû à Max Noether (1870).

– (Principe de Hasse) Si une conique sur le corps $\mathbf{Q}$ des rationnels possède des points dans tous les complétés de $\mathbf{Q}$, elle possède un point dans $\mathbf{Q}$. Énoncé avec des congruences plutôt que dans le langage de Hensel, ce théorème est dû à Legendre (1785).

– (Approximation faible) Si une conique sur $\mathbf{Q}$ possède un point rationnel, alors pour tout complété de $\mathbf{Q}$ les points à coordonnées dans $\mathbf{Q}$ sont denses dans les points à coordonnées dans le complété, pour la topologie définie par ce complété. Ceci résulte immédiatement du fait qu'une conique avec un point rationnel est isomorphe à la droite projective. De façon plus générale, on peut approximer simultanément en un nombre fini de places de $\mathbf{Q}$.

De façon naïve, on peut envisager plusieurs généralisations en dimension supérieure des coniques, c'est-à-dire des courbes de genre zéro :

(a) Les variétés (géométriquement) unirationnelles, qui après extension finie du corps de base sont birationnelles à un espace projectif.

(b) Les variétés (géométriquement) rationnelles, qui après extension finie du corps de base sont dominées par une variété rationnelle.

***Classification mathématique par sujets* (2010).** – 14M20, 14D05, 12G05.
Mots clefs. – Variétés rationnellement connexes, groupes algébriques semi-simples, torseurs.

(c) Les hypersurfaces dans l'espace projectif $\mathbf{P}^n_k$ sur un corps k définies par une équation homogène disons non singulière $f(x_0, \ldots, x_n) = 0$ de degré $d \leq n$.

Points rationnels sur quel corps de base k ? De tout temps on s'est intéressé au corps $\mathbf{Q}$ des rationnels, et plus généralement aux corps de nombres. Sur de tels corps, on dispose malheureusement encore de très peu de résultats généraux. De façon un peu grossière, disons que, sur de tels corps, on a de très bons résultats pour :

(1) Les espaces homogènes de groupes algébriques linéaires connexes (cohomologie galoisienne).

(2) Les hypersurfaces $f(x_0, \ldots, x_n) = 0$ avec n grand par rapport à d (méthode du cercle).

Citons des problèmes étudiés pour ces types de variétés : le principe de Hasse (l'existence de solutions dans tous les complétés de k implique-t-elle l'existence de solutions dans k ?), la densité des solutions pour la topologie de Zariski, l'approximation faible (les solutions globales sont-elles denses dans les solutions locales ?).

Avant de s'attaquer aux corps de nombres, ou même aux corps de fonctions d'une variable sur un corps fini, on doit déjà considérer la situation sur un corps fini, et sur un corps de fonctions d'une variable sur un corps algébriquement clos. Il y a dans cette direction des théorèmes classiques :

Théorème de Tsen (1933) : Sur un corps de fonctions d'une variable sur un corps algébriquement clos, toute forme homogène $f(x_0, \ldots, x_n)$ en $n+1 > d$ variables a un zéro non trivial.

Théorème de Chevalley-Warning (1935) : Sur un corps fini, toute forme homogène $f(x_0, \ldots, x_n)$ en $n+1 > d$ variables a un zéro non trivial.

On sait aussi que les espaces homogènes de groupes algébriques linéaires connexes sur un corps fini ou sur un corps de fonctions d'une variable sur un corps algébriquement clos, ont un point rationnel. Le premier énoncé est dû à Lang. Le second, en caractéristique zéro, est dû à Springer (1962). Ces deux énoncés furent généralisés par Steinberg, qui démontra (1965) la Conjecture I de Serre [**13**, 1962] : sur tout corps parfait de dimension cohomologique 1, tout espace (principal) homogène d'un groupe linéaire connexe possède un point rationnel.

Existe-t-il une classe naturelle de variétés algébriques qui sur un corps fini ont automatiquement des points rationnels ?

Existe-t-il une classe naturelle de variétés algébriques qui sur un corps de fonctions d'une variable sur un corps algébriquement clos ont automatiquement des points rationnels ?

Par exemple, dans son exposé [**15**] au congrès international d'Amsterdam en 1954, A. Weil montra (avec une méthode cohomologique uniforme) que toute surface géométriquement rationnelle sur un corps fini possède un point rationnel.

Dans un cadre purement géométrique, c'est-à-dire sur un corps de base algébriquement clos, la question : *En dimension supérieure, sur un corps de base algébriquement clos, quelles sont les généralisations des coniques, c'est-à-dire des courbes de genre* *zéro* est aussi apparue naturellement dans l'étude de la classification (birationnelle) des variétés de dimension supérieure, en dimension 2 chez l'école italienne il y a plus d'un siècle, et en dimension plus grande à partir des années 1980.

En dimension 2, toute surface unirationelle est rationnelle (Castelnuovo), et toute surface quadrique ou cubique lisse est rationnelle.

C'est au début des années 1990 qu'une réponse satisfaisante a été donnée en dimension quelconque. La bonne classe est celle des variétés rationnellement connexes, dont les propriétés principales ont été dégagées par Kollár, Miyaoka et Mori [**12**] et qui sont aussi apparues dans les travaux de F. Campana [**2**].

Ce sont les variétés telles que deux points généraux sont reliés par une courbe de genre zéro. Cette hypothèse couvre les trois types de variétés (a), (b) et (c) envisagées naïvement. C'est clair pour (a) et (b), pour (c) on a le théorème de Campana et de Kollár, Miyaoka et Mori : les variétés de Fano sur les complexes sont rationnellement connexes.

Il y a en fait plusieurs définitions des variétés (projectives, lisses) rationnellement connexes : celle donnée ci-dessus, la connexité rationnelle par chaînes (deux points sont reliés par un nombre fini de courbes de genre zéro) et la connexité rationnelle séparable, qu'on peut caractériser de façon a priori très différente : on demande l'existence d'un morphisme $\mathbf{P}^1 \to X$ tel que l'image réciproque du faisceau tangent sur X soit somme directe de $\mathcal{O}(a_i)$ *avec tous les* $a_i > 0$. Sur un corps non dénombrable de caractéristique zéro, ces trois propriétés sont équivalentes. La démonstration de ce résultat utilise les propriétés des schémas Hom, et des techniques de déformation. On renvoie ici aux lecteurs aux textes de synthèse [**1, 3, 10**].

Il devint alors intéressant de voir ce que l'on peut dire de l'arithmétique des variétés rationnellement connexes. Quels énoncés connus ou conjecturés pour les surfaces (géométriquement) rationnelles valent pour toutes les variétés rationnellement connexes ?

Les premiers résultats généraux furent obtenus par Kollár, qui étudia pour ces variétés la R-équivalence sur les points rationnels de ces variétés lorsque le corps de base est local (p-adique ou réel)(1999), puis lorsque le corps de base est fini (2004). La R-équivalence est une version sur un corps k quelconque de la rationalité connexe par chaînes sur un corps algébriquement clos : c'est la relation d'équivalence sur les points k-rationnels d'une k-variété projective engendrée par la relation élémentaire : être dans l'image des points k-rationnels d'une droite $\mathbf{P}^1_k$ par un k-morphisme $\mathbf{P}^1_k \to X$.

Revenons aux deux problèmes arithmétiques posés ci-dessus. En 2003, des énoncés que l'on peut considérer comme les meilleures extensions possibles du théorème de Tsen d'une part, du théorème de Chevalley-Warning d'autre part, furent établis.

En 2003, Graber, Harris et Starr [**5**] montrèrent que *toute variété rationnellement connexe définie sur un corps de fonctions d'une variable sur les complexes* a un point rationnel. D'un point de vue géométrique, cela dit que toute famille à un paramètre de telles variétés admet une section. Ils montrèrent ensuite, dans un article avec B. Mazur, que la classe des variétés rationnellement connexes est la classe la plus large pour laquelle on peut espérer un tel théorème. Ainsi certaines surfaces d'Enriques sur un corps de fonctions d'une variable n'ont pas de point rationnel.

On trouvera dans le présent volume diverses applications du résultat et des méthodes de Graber, Harris et Starr. Le travail lui-même et l'article subséquent de de Jong et Starr [**8**] ont fait l'objet de compte-rendus détaillés ([**3, 14**]).

En 2003 également, H. Esnault [**4**] montra que *toute variété rationnellement connexe définie sur un corps fini possède un point rationnel.* Elle montra cela pour une classe plus large de variétés. Cette classe contient en particulier les surfaces d'Enriques. La technique employée est la cohomologie ℓ-adique (ou p-adique), elle repose sur un théorème d'intégralité de valeurs propres de Frobenius établi par Deligne dans SGA7.

Le travail de Graber, Harris et Starr introduisait une nouvelle idée dans les méthodes de déformation. Cette idée fut exploitée dans d'autres contextes par Kollár [**11**] et par Hassett et Tschinkel (étude de l'approximation faible pour les variétés rationnellement connexes sur un corps de fonctions d'une variable sur les complexes, [**6**, 2006]).

Les corps finis et les corps de fonctions d'une variable sur les complexes partagent une propriété : ils sont de dimension cohomologique 1. En dimension cohomologique 2, on trouve plusieurs types de corps intéressants : les corps de nombres totalement imaginaires, les corps p-adiques, les corps de fonctions d'une variable sur un corps fini, les corps de fonctions de deux variables sur un corps algébriquement clos. Quand une propriété de géométrie arithmétique a été établie pour l'un des ces corps, il est tentant de voir si elle vaut aussi pour les autres corps. On a par exemple les propriétés bien connues suivantes :

– (Lang 1952) Toute forme homogène de degré d en $n+1 \geq d^2$ variables sur un corps de fonctions de deux variables sur $\mathbf{C}$, ou sur un corps de fonctions d'une variable sur un corps fini, a un zéro non trivial.

– (Brauer, Hasse, Noether 1931) Pour une algèbre à division sur un corps local, ou sur un corps de nombres, l'indice (racine carrée de la dimension) est égal à l'exposant (ordre de la classe de l'algèbre dans le groupe de Brauer).

– (Kneser 1965, Bruhat-Tits 1967) Sur un corps p-adique, tout espace principal homogène sous un groupe semisimple simplement connexe possède un point rationnel.

– (Kneser et Harder 1965, Chernousov 1990) Sur un corps de nombres totalement imaginaire, ou sur un corps de fonctions d'une variable sur un corps fini, tout espace principal homogène sous un groupe semisimple simplement connexe possède un point rationnel.

Serre a demandé si ces deux derniers énoncés sont des cas particuliers d'un résultat valable pour tous les corps de dimension cohomologique 2 (c'est la « Conjecture II » de Serre, [**13**, 1962]).

Ces énoncés, et la comparaison avec ce qui a été rappelé plus haut, ont amené entre autres B. Mazur à se demander s'il existe une classe de variétés « rationnellement simplement connexes » pour laquelle on aurait par exemple un analogue du théorème de Graber, Harris et Starr, mais cette fois-ci sur tout corps de fonctions de deux variables sur les complexes.

On n'a pas à ce jour une théorie aussi nette que celle des variétés rationnellement connexes, mais des travaux importants dans cette direction ont été effectués par de Jong, Starr, et d'autres.

Citons particulièrement :

(de Jong [**7**, 2004]) Pour toute algèbre à division sur un corps de fonctions de deux variables sur les complexes, indice et exposant coïncident. Plusieurs autres démonstrations ont suivi (Lieblich, de Jong et Starr).

À partir de 2004, de Jong et Starr ont proposé plusieurs définitions pour les variétés « simplement rationnellement connexes » et établi des analogues partiels pour ces variétés du théorème que les variétés de Fano sont rationnellement connexes.

Une application spectaculaire de leur méthode est le théorème suivant :

([**9**]) Sur un corps de fonctions de deux variables sur les complexes, tout espace principal homogène sous un groupe semisimple simplement connexe possède un point rationnel. (Des travaux de Merkur'ev-Suslin, Bayer-Parimala, Chernousov, Gille avaient laissé ouvert le cas du groupe E_8 déployé. de Jong, He et Starr donnent une démonstration uniforme pour tous les groupes déployés.)

Le présent ouvrage est issu d'une rencontre *Etats de la Recherche* (CNRS/SMF) organisée à Strasbourg en mai 2008, sur le thème *Variétés rationnellement connexes : aspects géométriques et arithmétiques*. Les organisateurs avaient demandé à Laurent Bonavero et à Olivier Wittenberg de faire une introduction aux méthodes et problèmes dans ce domaine, et à Brendan Hassett et Jason Starr de faire un rapport sur des travaux d'actualité.

Le cours de Laurent Bonavero *Variétés rationnellement connexes sur un corps algébriquement clos* est une introduction à la notion de variété rationnellement connexe et à ses différents avatars, qui permettra au lecteur débutant de lire l'ensemble des textes sans recourir d'emblée aux textes plus détaillés sur la question (Kollár, Debarre, Araujo-Kollár). On y trouvera aussi de nombreux exemples (chapitre 1) ainsi que des ouvertures vers les développements modernes du programme de Mori (chapitre 1 et chapitre 7, qui traite de la conjecture de connexité rationnelle par chaînes de Shokurov).

Les progrès proprement arithmétiques dans l'étude des points rationnels des variétés rationnellement connexes font l'objet du texte *La connexité rationnelle en arithmétique*, par Olivier Wittenberg. Le texte commence par un tour d'horizon des résultats classiques et des problèmes ouverts. Il se poursuit par un rapport détaillé sur :

– les résultats de Kollár sur les variétés rationnellement connexes sur les corps p-adiques et plus généralement les corps « fertiles »,

– les résultats de Kollár et Szabó sur les variétés (séparablement) rationnellement connexes sur les corps finis, avec une variante dans la démonstration du théorème principal,

– une application de ces techniques au problème de Galois inverse.

Ce texte devrait faciliter la lecture des textes originaux.

Le dernier chapitre de l'article de Wittenberg est consacré au théorème d'H. Esnault mentionné plus haut, et à des développements ultérieurs. On trouvera ici la variante ℓ-adique de la démonstration du théorème d'H. Esnault.

La contribution de Brendan Hassett s'intitule *Weak approximation and rationally connected curves over function fields of curves.*

Pour une variété sur un corps F de fonctions d'une variable sur les complexes, on peut considérer les complétés du corps F en diverses places et poser la question :

Pour une variété rationnellement connexe sur un corps de fonctions d'une variable sur les complexes, l'approximation faible vaut-elle ?

Cette question est motivée par la question analogue, et bien difficile, sur un corps global (corps de nombres ou corps de fonction d'une variable sur un corps fini) : sur un tel corps, on connaît des contre-exemples à l'approximation faible pour les variétés rationnellement connexes, mais seulement aux places de mauvaise réduction.

Sur un corps de fonctions d'une variable sur les complexes, on se demande si l'approximation faible vaut en tout ensemble fini de places, de mauvaise réduction ou pas. Mais déjà en dimension 2, c'est-à-dire pour les surfaces géométriquement rationnelles, on ne sait pas répondre à la question ci-dessus en toute généralité.

On dispose cependant de plusieurs résultats. Déjà dans les années 90, Kollár, Miyaoka et Mori avaient obtenu un cas particulier de l'approximation faible (approximation au premier ordre) pour les variétés rationnellement connexes possédant un un point rationnel (cette dernière condition est maintenant superflue, d'après Graber, Harris et Starr), du moins au-dessus des places où la variété a bonne réduction. Toujours au-dessus de ces places, Hassett et Tschinkel ont établi l'approximation faible pour toute variété rationnellement connexe. Cela laisse ouverte la question de l'approximation aux places de mauvaise réduction. Pour ces places, ils ont obtenu des résultats positifs dans les deux cas suivants :

– la mauvaise réduction n'est pas trop mauvaise,

– la variété est dans un certain sens « simplement rationnellement connexe ».

Le texte de B. Hassett couvre ces résultats, indique des développements récents. Certains des résultats sont originaux : théorème réciproque (l'approximation faible n'est possible que pour les variétés rationnellement connexes), résultat sur les hypersurfaces de relativement bas degré.

Un court complément sur les applications stables devrait être utile à plus d'un lecteur.

La contribution de Jason Starr est intitulée *Rational points of rationally simply connected varieties.*

Starr y décrit le théorème commun avec He et de Jong mentionné plus haut : la démonstration de la Conjecture II de Serre pour les groupes semisimples simplement connexes déployés sur un corps de fonctions de deux variables sur un corps algébriquement clos. La démonstration de ce théorème dans le texte original est formidable, au sens où l'on entendait ce mot au XVII[e] siècle. Cela tient en partie au désir de discuter des variétés rationnellement simplement connexes les plus générales, avant de traiter le problème des espaces homogènes. Nous sommes donc très reconnaissants à J. Starr d'avoir, pour le présent ouvrage, pris le soin de rédiger une version (partiellement) allégée de l'argument, suffisante pour traiter la conjecture II – et aussi pour donner une démonstration alternative du théorème de de Jong « indice = exposant » mentionné plus haut. Ceci dit, la démonstration est encore très imposante, et je n'aurai pas l'outrecuidance de tenter de la résumer en quelques lignes.

Pour terminer, indiquons que les auteurs se sont obligeamment prêtés au jeu de la critique par rapporteur anonyme, et ont, quand cela était demandé, opéré d'importantes modifications dans leurs textes.

Le 1[er] septembre 2010

J.-L. Colliot-Thélène

Références

[1] C. Araujo & J. Kollár – « Rational curves on varieties », in *Higher dimensional varieties and rational points (Budapest, 2001)*, Bolyai Soc. Math. Stud., vol. 12, Springer, 2003, p. 13–68.

[2] F. Campana – « Connexité rationnelle des variétés de Fano », *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **25** (1992), p. 539–545.

[3] O. Debarre – *Higher-dimensional algebraic geometry*, Universitext, Springer, 2001.

[4] H. Esnault – « Varieties over a finite field with trivial Chow group of 0-cycles have a rational point », *Invent. Math.* **151** (2003), p. 187–191.

[5] T. Graber, J. Harris & J. M. Starr – « Families of rationally connected varieties », *J. Amer. Math. Soc.* **16** (2003), p. 57–67.

[6] B. Hassett & Y. Tschinkel – « Weak approximation over function fields », *Invent. Math.* **163** (2006), p. 171–190.

[7] A. J. de Jong – « The period-index problem for the Brauer group of an algebraic surface », *Duke Math. J.* **123** (2004), p. 71–94.

[8] A. J. de Jong & J. M. Starr – « Every rationally connected variety over the function field of a curve has a rational point », *Amer. J. Math.* **125** (2003), p. 567–580.

[9] ———, « Families of rationally simply connected varieties over surfaces and torsors for semisimple groups », prépublication arXiv:0809.5224, 2008.

[10] J. Kollár – *Rational curves on algebraic varieties*, Ergebnisse Math. Grenzg., vol. 32, Springer, 1996.

[11] ———, « Specialization of zero cycles », *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **40** (2004), p. 689–708.

[12] J. Kollár, Y. Miyaoka & S. Mori – « Rationally connected varieties », *J. Algebraic Geom.* **1** (1992), p. 429–448.

[13] J-P. Serre – « Cohomologie galoisienne des groupes algébriques linéaires », in *Colloq. Théorie des Groupes Algébriques (Bruxelles, 1962)*, Librairie Universitaire, Louvain, 1962, p. 53–68.

[14] J. M. Starr – « Arithmetic over function fields », in *Arithmetic geometry*, Clay Math. Proc., vol. 8, Amer. Math. Soc., 2009, p. 375–418.

[15] A. Weil – « Abstract versus classical algebraic geometry », in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 1954, Amsterdam, vol. III*, Erven P. Noordhoff N.V., Groningen, 1956, p. 550–558.

Jean-Louis Colliot-Thélène, Arithmétique et Géométrie Algébrique, Université Paris-Sud, Bâtiment 425, 91405 Orsay Cedex, France
E-mail : Jean-Louis.Colliot-Thelene@math.u-psud.fr

Panoramas & Synthèses
31, 2010, p. 9–60

VARIÉTÉS RATIONNELLEMENT CONNEXES SUR UN CORPS ALGÉBRIQUEMENT CLOS

par

Laurent Bonavero

Résumé. – Ce sont les notes d'un mini-cours sur les variétés rationnellement connexes, écrit pour les Etats de la Recherche de la Société Mathématique de France (Strasbourg, 2008).

On met l'accent sur les aspects géométriques. Ces notes sont aussi une invitation à lire le livre d'Olivier Debarre [**15**], dont une grande partie de ce cours est extraite. Ces notes doivent surtout permettre au lecteur de comprendre l'énoncé suivant :

Sur un corps algébriquement clos, soient X une variété projective lisse et $\varphi : X \to C$ un morphisme surjectif sur une courbe projective lisse C. Si la fibre générale de φ est séparablement rationnellement connexe, alors φ possède une section.

Ainsi que l'un de ses fameux corollaires [**20**] :

Sur un corps algébriquement clos de caractéristique zéro, soit $f : X \to Y$ un morphisme dominant entre deux variétés projectives. Si Y et la fibre générale de f sont rationnellement connexes, alors X est rationnellement connexe.

Ce cours est rédigé dans l'espoir de s'adresser à un public large, à l'exception peut-être du §7, écrit en collaboration avec Stéphane Druel, où nous donnons les détails de la preuve de la conjecture de connexité rationnelle de Shokurov par Hacon et M^{c}Kernan, plus technique et où les prérequis sont un peu plus importants.

***Abstract* (Rationally connected varieties on an algebraically closed field).** – These are lectures notes on rationally connected varieties, written for the "Etats de la Recherche" of the French Mathematical Society held in Strasbourg (May 2008). We focus on geometric aspects. These lectures notes are also an invitation to read Debarre's book [**15**], which was a great source of inspiration. These lectures notes should provide for the reader all the necessary material to understand the following statement :

Let X be a projective manifold defined over an algebraically closed field and let $\varphi : X \to C$ be a surjective morphism over a smooth projective curve C. If the general fiber of φ is separably rationally connected, then φ has a section.

Together with one of its famous consequences [**20**]:

***Classification mathématique par sujets* (2010).** – 14E05, 14E30, 14J40, 14J45.
Mots clefs. – Courbes rationnelles, variétés rationnellement connexes.

Je remercie tous les participants pour leurs commentaires qui ont permis d'améliorer grandement ce texte par rapport à la version distribuée le jour de la conférence. Stéphane Druel à Grenoble m'a apporté une aide inestimable lors de la préparation de ce cours.

Let $f : X \to Y$ a dominant map between two projective varieties over an algebraically closed field of characteristic zero. If both Y and the general fiber of f are rationally connected, then X is rationally connected.

These notes have been written in order that a wide audience can easily read them, except maybe the last section, written in collaboration with Stéphane Druel, a bit more technical, where we give the detailed proof of Shokurov's rational connectedness conjecture following Hacon and M^{c}Kernan.

LECTURE I

COURS 1

Ce premier cours est un survol sur l'importance et la présence des courbes rationnelles en géométrie algébrique. On traite le cas particulier des hypersurfaces de l'espace projectif et on discute le lien entre courbes rationnelles et géométrie birationnelle classique (éclatements, lieux exceptionnel et d'indétermination) ou moderne (théorie de Mori). On introduit enfin la notion de connexité rationnelle et des notions qui lui sont reliées.

Introduction

Sauf mention explicite du contraire, toutes les variétés algébriques et les morphismes considérés sont définis *sur un corps k algébriquement clos de caractéristique arbitraire*, les variétés sont irréductibles et réduites. Certains énoncés ne sont valables qu'en caractéristique 0 (ceux dont la preuve nécessite le théorème de lissité générique ou ceux pour lesquels il faut utiliser une résolution des singularités) ou sur un corps non dénombrable (ceux pour lesquels il est important de savoir qu'une variété n'est pas réunion dénombrable de sous-variétés propres), on le mentionnera explicitement.

Une courbe est une variété projective intègre (irréductible et réduite) de dimension 1.

Si X est une variété (quasi-) projective, on dira qu'un point est en position générale, ou plus simplement général, s'il appartient à un ouvert non vide (non spécifié) de X, qu'il est en position très générale, ou plus simplement très général, s'il appartient au complémentaire d'une réunion dénombrable de fermés stricts de X. Cette dernière notion n'est que très peu pertinente sur un corps dénombrable où le complémentaire d'une réunion dénombrable de fermés stricts de X peut être vide.

1. Quelques exemples de variétés possédant des courbes rationnelles

1.1. Généralités. – Il y a trois grandes classes de courbes projectives lisses : la droite projective $\mathbb{P}^1$ (dont la topologie complexe est celle d'une sphère), les courbes elliptiques (dont la topologie complexe est celle d'un tore), les courbes de genre ≥ 2 (dont la topologie complexe est celle d'une bouée multi-places). Il y a énormément d'invariants ou outils permettant de distinguer ces trois classes, celui qui nous sera le plus utile sera le signe du fibré canonique : si X est une variété projective lisse de dimension n, on note classiquement $K_X := -\det T_X$[1]. C'est le fibré en droites dont les sections locales sont les n-formes régulières $f(z_1, \ldots, z_n)dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n$. Pour une courbe lisse C, on a $K_C = T_C^*$ et les propriétés suivantes sont satisfaites : $-K_{\mathbb{P}^1}$ est ample, K_E est trivial si E est une courbe elliptique et K_C est ample si C est de genre ≥ 2.

Le problème suivant est un problème classique en géométrie algébrique : si $X \subset \mathbb{P}^N$ est une variété projective, existe-t-il une courbe dans X de degré donné et de genre donné ? Si oui, en existe-t-il beaucoup et que peut-on dire du lieu dans X couvert par ces courbes ? Une situation élémentaire où l'on peut énoncer une réponse complète est le cas des courbes planes : si $C \subset \mathbb{P}^2$ est une courbe lisse plane de genre g et de degré d, alors $g = (d-1)(d-2)/2$. Si $C \subset \mathbb{P}^2$ est une courbe de degré d (ceci signifie que C intersecte une droite générale de $\mathbb{P}^2$ en d points), alors le genre g de sa désingularisée vérifie $g \leq (d-1)(d-2)/2$. En particulier, si $C \subset \mathbb{P}^2$ est isomorphe à $\mathbb{P}^1$, alors C est une droite ou une conique dans $\mathbb{P}^2$ et si $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2$ est un morphisme dont l'image $f(\mathbb{P}^1)$ est de degré ≥ 3, alors $f(\mathbb{P}^1)$ est nécessairement singulière.

Définition 1. – *Soit X une variété projective. Une courbe rationnelle sur X est un morphisme $f : \mathbb{P}^1 \to X$ non constant*[2]*. Le degré d'une courbe rationnelle $f : \mathbb{P}^1 \to X$ est le degré du morphisme f.*

Le lecteur débutant doit commencer par se convaincre qu'il n'y a pas de morphisme $f : \mathbb{P}^1 \to C$ non constant si C est une courbe de genre ≥ 1.[3]

1.2. Courbes rationnelles contenues dans les hypersurfaces de $\mathbb{P}^n$. – Les courbes rationnelles les plus simples dans l'espace projectif sont les droites. On se demande ici si une hypersurface (générale) de degré d dans $\mathbb{P}^n$ contient (au moins) une droite.

La variété des droites dans $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V)$ (où V est un espace vectoriel de dimension $n+1$[4]) est la grassmannienne $G(2, n+1)$ de dimension $2n-2$. Il y a sur $G(2, n+1)$

---

(1) On ne distinguera pas entre notation additive et multiplicative pour le groupe de Picard. Ici, K_X est le dual du fibré $\det T_X$.

(2) Il pourra arriver que par abus de langage (ou par inattention), on parle aussi de courbes rationnelles pour désigner l'image d'un morphisme non constant $f : \mathbb{P}^1 \to X$.

(3) Dans sa thèse **[37]**, R. Lazarsfeld montre le très joli résultat suivant : si X est une variété projective complexe lisse de dimension n et si $f : \mathbb{P}^n \to X$ est un morphisme surjectif, alors $X \simeq \mathbb{P}^n$. La preuve utilise de façon essentielle la géométrie des courbes rationnelles de X. Hwang et Mok ont depuis étendu ce résultat à de nombreuses variétés de Fano avec nombre de Picard égal à 1.

(4) Dans tout ce cours, nous suivons la convention naïve : $\mathbb{P}(V)$ désigne la variété des droites vectorielles de V.

un sous-fibré tautologique E de rang 2 du fibré trivial $G(2,n+1) \times V$ (la fibre $E_{[l]}$ de E au dessus de $[l] \in G(2,n+1)$ est le sous-espace vectoriel de V de dimension 2 défini par la droite $l \subset \mathbb{P}(V)$). Une hypersurface X_d de degré d dans $\mathbb{P}(V)$ est donnée par son équation, à savoir un polynôme homogène de degré d, autrement dit un élément s de $S^d(V^*)$. L'hypersurface X_d contient la droite l si et seulement si $s_{|E_{[l]}}$ est nul. La sous-variété $F_{X_d}(1,n,d)$ de $G(2,n+1)$ des droites contenues dans X_d est donc le lieu des zéros de s vue comme section du fibré $S^d(E^*)$ sur $G(2,n+1)$. Il est alors bien connu (en caractéristique zéro seulement) que pour s générale, $\dim F_{X_d}(1,n,d) = \dim G(2,n+1) - \operatorname{rg} S^d(E^*)$ si cette quantité est positive ou nulle, et que $F_{X_d}(1,n,d)$ est vide sinon. Comme $\operatorname{rg} S^d(E^*) = d+1$, on en déduit l'énoncé suivant.

Proposition 2. – *En caractéristique nulle*[(5)]*, une hypersurface générale de degré d dans $\mathbb{P}^n$ contient une infinité de droites si $d < 2n-3$, un nombre fini de droites si $d = 2n-3$ et ne contient pas de droites si $d > 2n-3$.*

Le lecteur intéressé consultera **[18]** pour en savoir beaucoup plus sur la variété des r-plans contenus dans une intersection complète. Il y trouvera aussi des valeurs numériques du nombre de droites contenues dans une hypersurface générale de degré $2n-3$ dans $\mathbb{P}^n$, dont le célèbre et classique : il y a 27 droites sur une cubique lisse de $\mathbb{P}^3$.

Dans le cas où $d < 2n-3$, il est possible de préciser un peu le lieu de X_d couvert par les droites contenues dans X_d. Soit en effet $Z \subset X_d \times F_{X_d}(1,n,d)$ la variété d'incidence suivante :

$$Z := \{(x,[l]) \in X_d \times F_{X_d}(1,n,d) \mid x \in l\}.$$

Les fibres de la deuxième projection $Z \to F_{X_d}$ étant de dimension 1, on a $\dim Z = 2n-2-d$. Soit $V = p_1(Z) \subset X_d$ l'image de Z dans X_d par la première projection : c'est le lieu de X_d couvert par les droites contenues dans X_d. Si $d \geq n$, on déduit de ce qui précède que V est une sous-variété stricte de X_d, on montre aussi aisément[(6)] que si $d \leq n-1$, alors $V = X_d$, autrement dit X_d est couverte par des droites. Finalement, dans le cas $d = n$, des arguments analogues permettent de montrer que X_n est couverte par des coniques[(7)].

[(5)] Cet énoncé est en fait encore vrai en caractéristique positive.

[(6)] Si s est un polynôme homogène de degré d définissant X_d et si $x = [1:0:\cdots:0] \in X_d$, alors la droite passant par x et un point $[0:x_1:\cdots:x_n]$ est contenue dans X_d si et seulement si $s(t,x_1,\ldots,x_n) = 0$ pour tout t. Comme $t \mapsto s(t,x_1,\ldots,x_n)$ est un polynôme en t de degré $\leq d-1$, ce polynôme est nul si et seulement si ses d coefficients sont nuls, ce qui consiste à résoudre d équations homogènes de degrés respectifs $1,2,\ldots,d$ en les variables $[x_1:\cdots:x_n]$. Il y a au moins une solution si $d \leq n-1$. Dans le cas $d = n-1$, on remarque qu'il y en a $(n-1)!$, autrement dit par un point général de $X_{n-1} \subset \mathbb{P}^n$ passent $(n-1)!$ droites. Cette observation élémentaire a inspiré un très joli résultat dû à J.M. Landsberg **[36]**.

[(7)] *Merci à Laurent Manivel à qui je dois les références m'ayant permis d'écrire cette « footnote », en réponse à une question de Jean-Louis Colliot-Thélène.*

Par un point général de $X_n \subset \mathbb{P}^n$ passent un nombre fini de coniques. Il n'y a pas, à ma connaissance, de méthodes élémentaires pour déterminer ce nombre en dimension quelconque. La formule

Si X_d est une hypersurface lisse de degré d dans $\mathbb{P}^n$, son fibré canonique est calculé par la formule d'adjonction et vaut $K_{X_d} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d-n-1)_{|X_d}$. La proposition précédente est une première illustration d'un principe général : *« plus le fibré canonique K_X est positif, moins il y a de courbes rationnelles sur X, plus ce fibré est négatif, plus il y a de courbes rationnelles sur X ».*

De nombreux auteurs (dont Clemens, Voisin et Pacienza) ont étudié l'existence de courbes rationnelles de degré ≥ 2 dans les hypersurfaces de $\mathbb{P}^n$. Rassemblons leurs résultats (voir **[43]** et sa bibliographie).

Théorème 3. – *Supposons le corps de base de caractéristique nulle. Soit X_d une hypersurface très générale de degré d dans $\mathbb{P}^n$. Alors :*

1. *(Clemens) si $n \geq 3$ et $d \geq 2n-1$, X_d ne contient pas de courbes rationnelles,*
2. *(Voisin) si $n \geq 4$ et $d \geq 2n-2$, X_d ne contient pas de courbes rationnelles,*
3. *(Voisin) si $n \geq 5$ et si $\delta \geq 1$, X_{2n-3} ne contient qu'un nombre fini de courbes rationnelles de degré δ,*
4. *(Pacienza) si $n \geq 6$ et si $\delta \geq 2$, X_{2n-3} ne contient pas de courbes rationnelles de degré δ.*

---

générale découle d'un calcul d'invariants de Gromov-Witten à l'aide de la symétrie miroir utilisant une équation différentielle ordinaire introduite par Givental. Les lignes qui suivent sont issues de la lecture de **[28]** et **[27]**.

***Théorème* (Coates, Givental - Jinzenji, Nakamura, Suzuki)**. – *Sur le corps des nombres complexes, soit $X_n \subset \mathbb{P}^n$ une hypersurface générale de degré n dans $\mathbb{P}^n$. Soit N_n le nombre de coniques contenues dans X_n et passant par un point général de X_n. Alors*

$$N_n = \frac{(2n)!}{2^{n+1}} - \frac{(n!)^2}{2}.$$

On renvoie à **[3]** et **[7]** pour d'autres résultats sur les coniques contenues dans des hypersurfaces. Expliquons brièvement comment on obtient ce résultat. Si a, b, c et d sont quatre entiers, notons $\langle \mathcal{O}_a \mathcal{O}_b \mathcal{O}_c \rangle_d$ l'invariant de Gromov-Witten comptant le nombre (éventuellement infini) de courbes rationnelles de degré d contenues dans X_n et rencontrant 3 sous-espaces projectifs de $\mathbb{P}^n$, généraux, de codimension respective a, b et c. Lorsque a, b ou c valent 1, chaque courbe rationnelle de degré d contenue dans X_n est comptée d fois puisque l'intersection d'une courbe de degré d et d'un hyperplan général est constituée de d points. Comme l'intersection d'une droite générale et de X_n est constituée de n points, le nombre N_n cherché vaut donc $N_n = \langle \mathcal{O}_1 \mathcal{O}_1 \mathcal{O}_{n-1} \rangle_2 / 4n$. Dans **[27]** sont introduites des constantes $\tilde{L}_m^{n+1,n,d}$, dites « constantes de structure de l'anneau de cohomologie quantique de X_n ». Ces constantes satisfont aux formules récurrentes suivantes (que l'on explicite uniquement dans les cas $d=1$ et $d=2$) :

$$\sum_{m=0}^{n-1} \tilde{L}_m^{n+1,n,1} w^m = n \prod_{j=1}^{n-1} (jw + (n-j))$$

et

$$\sum_{m=0}^{n-2} \tilde{L}_m^{n+1,n,2} w^m = \sum_{j_2=0}^{n-2} \sum_{j_1=0}^{j_2} \sum_{j_0=0}^{j_1} \tilde{L}_{j_1}^{n+1,n,1} \tilde{L}_{j_2+1}^{n+1,n,1} w^{j_1-j_0} \left(\frac{1+w}{2}\right)^{j_2-j_1}.$$

Il y est aussi montré que pour tout entier m, $0 \leq m \leq n-2$, on a $\tilde{L}_m^{n+1,n,2} = \langle \mathcal{O}_1 \mathcal{O}_{n-1-m} \mathcal{O}_{m+1} \rangle_2 / n$. Le théorème découle du calcul du coefficient de w^{n-2} dans la deuxième formule ci-dessus, de celui de w^{n-1} dans la première et enfin de l'évaluation de cette dernière en $w = 2$. □

1.3. Courbes rationnelles provenant de la géométrie birationnelle classique. – La géométrie birationnelle consiste à classifier les variétés algébriques en identifiant deux variétés algébriques si elles sont « isomorphes sur un ouvert (de Zariski) non vide ».

Définition 4. – *Deux variétés algébriques X et X' sont birationnellement équivalentes s'il existe une application rationnelle $\varphi : X \dashrightarrow X'$ et des ouverts non vides $U \subset X$ et $U' \subset X'$ tels que $\varphi_{|U} : U \to U'$ soit un isomorphisme. Une telle φ est une* application birationnelle. *Si V' est une-sous variété de X' non contenue dans $X' \setminus U'$, $V =: \overline{\varphi^{-1}(U' \cap V')}$ est la* transformée stricte *de V' dans X.*

Un exemple fondamental d'application birationnelle est celui des éclatements le long de sous-variétés lisses : si Y est une sous-variété fermée lisse contenue dans le lieu non-singulier d'une variété algébrique X, il y a une variété algébrique $B_Y(X)$ et un morphisme birationnel $\pi : B_Y(X) \to X$ qui se restreint en un isomorphisme $\pi : B_Y(X) \setminus \pi^{-1}(Y) \to X \setminus Y$ et telle que $\pi^{-1}(Y) \simeq \mathbb{P}(N_{Y/X})$ où $N_{Y/X}$ désigne le fibré normal de Y dans X. L'application birationnelle $\pi : B_Y(X) \to X$ s'appelle *l'éclatement de X le long de Y, ou de centre Y* et $E := \pi^{-1}(Y)$ est le *diviseur exceptionnel* de π. Moralement, on remplace chaque point y de Y par l'espace projectif des directions normales à Y dans X passant par y. Comme les espaces projectifs contiennent beaucoup de courbes rationnelles, il y a en particulier des courbes rationnelles dans