Panoramas & Synthèses
8, 1999, p. 11–47

FEUILLETAGES HOLOMORPHES DE CODIMENSION 1. RÉDUCTION DES SINGULARITÉS EN PETITES DIMENSIONS ET APPLICATIONS

par

Dominique Cerveau

Résumé. — Ce texte est une introduction à la résolution des singularités des feuilletages holomorphes de codimension 1. Après quelques rappels et exemples concernant la désingularisation des courbes et des hypersurfaces, nous énonçons le théorème de réduction des singularités de feuilletages en dimension 2 et 3 avec une description précise des singularités finales. Nous appliquons ensuite cet outil à des problèmes classiques comme le théorème de Frobenius singulier ou la construction d'hypersurfaces invariantes.

Introduction

Soit X une variété analytique complexe lisse de dimension n. Comme d'habitude, on note Ω^p_X le faisceau des p formes holomorphes sur X, $\mathcal{O}_X = \Omega^0_X$. Un feuilletage holomorphe $\mathcal{F}$ de codimension 1 sur X se définit par la donnée d'un recouvrement $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ par des ouverts U_i et de 1-formes holomorphes $\omega_i \in \Omega^1(U_i)$ satisfaisant aux conditions :

(i) $\omega_i \wedge d\omega_i = 0$ (intégrabilité).

(ii) $\operatorname{Sing}\omega_i := \{m \in U_i \mid \omega_i(m) = 0\}$ est de codimension ≥ 2.

(iii) Sur $U_i \cap U_j$, $\omega_i = g_{ij}\omega_j$ où $g_{ij} \in \mathcal{O}^*(U_i \cap U_j)$ = unités holomorphes sur $U_i \cap U_j$.

Évidemment on peut synthétiser cette définition de manière faisceautique. L'ensemble singulier $\operatorname{Sing}\mathcal{F}$ est l'ensemble analytique de codimension ≥ 2 défini par $(\operatorname{Sing}\mathcal{F}) \cap U_i = \operatorname{Sing}\omega_i$. Un point non singulier est dit aussi régulier. La structure locale de $\mathcal{F}$ près d'un point régulier $m \in U_i$ est décrite par le théorème de Frobenius classique qui assure l'existence d'une submersion locale x_i et d'une unité g_i telles que $\omega_i = g_i dx_i$. On a alors la notion de feuilles locales (les niveaux de x_i) et par recollement maximal de feuilles globales. Sur certaines variétés, tout feuilletage $\mathcal{F}$

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 32L30, 32S70, 34A20.
Mots clefs. — Feuilletages holomorphes, réduction des singularités.

de codimension 1 aura un ensemble singulier non vide alors que, sur d'autres, tous les feuilletages seront non singuliers. Comme nous le verrons dans les exemples qui suivent, dans cette histoire non seulement la topologie mais aussi la structure complexe interviennent. Il semble donc utile d'avoir une description raisonnable des singularités de feuilletages et nous nous appliquerons à montrer comment les énoncés de réduction des singularités peuvent être exploités en ce sens. Le discours étant censé s'adresser en particulier aux non spécialistes, nous avons rappelé des énoncés classiques bien souvent anciens, mais qui restent en pratique incontournables. Un certain nombre de thèmes importants sont tout juste effleurés, prétexte à indiquer la bibliographie ; en particulier tout ce qui touche aux problèmes globaux dont l'introduction nécessite un matériel beaucoup plus conséquent.

1. Exemples de feuilletages (avec ou sans singularités)

1.1. Sur les tores. — Considérons un tore complexe $\mathbb{T}^n(\Lambda) = \mathbb{C}^n/\Lambda$ où Λ est un réseau de $\mathbb{C}^n$: $\Lambda = \oplus \mathbb{Z} e_i$, (e_i) $\mathbb{R}$-base de $\mathbb{C}^n$. Si L est une forme linéaire sur $\mathbb{C}^n$, le feuilletage donné par la forme globale $\omega = dL$ passe au quotient et définit un feuilletage sans singularités $\mathcal{F}(L, \Lambda)$ sur $\mathbb{T}^n(\Lambda)$. Ses feuilles sont les projections des hyperplans $L =$ constante. Si le réseau Λ est suffisamment général il n'y a pas de fonctions méromorphes sur $\mathbb{T}^n(\Lambda)$ non constantes. Un feuilletage $\mathcal{F}$ sur $\mathbb{T}^n(\Lambda)$ (avec ou sans singularités) se relève en un feuilletage $\widetilde{\mathcal{F}}$ sur $\mathbb{C}^n$ que l'on peut définir par une 1-forme $\omega = dx_1 + \sum_{i \geq z} a_i dx_i$ où les a_i sont méromorphes Λ-périodiques, donc constants. Ainsi sur de tels tores les feuilletages sont de types $\mathcal{F}(L, \Lambda)$ et, en particulier sans singularités. Ce raisonnement s'effondre sur les tores algébriques (par exemple un produit de courbes elliptiques). Dans [**22**], E. Ghys donne en particulier la classification des feuilletages sur les tores.

1.2. Sur les espaces projectifs. — Un feuilletage $\mathcal{F}$ sur l'espace projectif $\mathbb{CP}(n)$ induit via la projection $p : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{CP}(n)$ un feuilletage $p^*\mathcal{F}$ sur $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$; H. Cartan a démontré en 1938 dans [**14**] que $H^1(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}, \mathcal{O}^*) = 0$ pour $n \geq 2$. Ceci implique notamment que $p^*\mathcal{F}$ se laisse définir par une 1-forme globale $\underline{\omega} \in \Omega^1(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})$ qui s'étend par le théorème d'Hartogs (ici la formule de Cauchy) en un élément $\omega \in \Omega^1(\mathbb{C}^{n+1})$. Invoquant le fait que le noyau de ω au point m doit contenir la droite $[Om]$, on montre facilement que l'on peut choisir $\omega = \sum_{i=0} a_i dx_i$ homogène intégrable projective (*i.e.* les a_i sont des polynômes homogènes de même degré et $\sum x_i a_i = 0$). C'est l'analogue pour les feuilletages du théorème de Chow qui affirme qu'un sous ensemble analytique de $\mathbb{CP}(n)$ est en fait algébrique. Le théorème de Bezout ou le théorème de division de de Rham-Saito (dont nous reparlerons) montrent qu'un tel feuilletage a un lieu singulier non vide de codimension ≥ 2. Il y a actuellement toute une activité concernant les feuilletages sur les espaces projectifs qui sont bien loin d'être compris, en particulier sur $\mathbb{CP}(2)$ qui est finalement le cas le plus difficile.

Faut-il rappeler que l'étude des feuilletages sur $\mathbb{CP}(2)$ s'identifie à celles des équations différentielles $y' = R(x, y)$ où $R \in \mathbb{C}(x, y)$; si $R = A/B$, $A, B \in \mathbb{C}[x, y]$, on remarque en effet que les solutions $x \mapsto y(x)$ de notre équation différentielle produisent des paramétrisations (locales) des feuilles du feuilletage défini en coordonnées affines par $\omega = Adx - Bdy$.

Voici trois problèmes classiques concernant les feuilletages de $\mathbb{CP}(n)$.

1.2.1. Problème de Poincaré ([**38**]*, tome III, pages 35 et 59).* — Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de $\mathbb{CP}(2)$ et Γ une courbe algébrique ; Γ est dite $\mathcal{F}$-invariante si $\Gamma \setminus \operatorname{Sing} \mathcal{F}$ est feuille de $\mathcal{F}$. Si $\mathcal{F}$ possède une infinité de courbes algébriques invariantes, alors $\mathcal{F}$ possède une intégrale première rationnelle : il existe des polynômes homogènes P et Q tels que les feuilles de $\mathcal{F}$ soient précisément les courbes $\lambda P + \mu Q = 0, \lambda, \mu \in \mathbb{C}$. C'est un résultat connu de Darboux, dont on trouve la démonstration dans [**25**]. Si $\mathcal{F}$ est définie par la forme homogène $\omega = \sum a_i dx_i$ le degré de $\mathcal{F}$ est par définition $\deg \mathcal{F} = \deg a_i - 1$. Géométriquement $\deg \mathcal{F}$ est le nombre de tangences de $\mathcal{F}$ avec une droite générale L, *i.e.* le nombre de points de L où $\mathcal{F}$ n'est pas transverse à L en un sens évident. Le problème de Poincaré consiste, dans le cas où $\mathcal{F}$ ne possède pas d'intégrale première rationnelle, à estimer le degré des courbes algébriques invariantes Γ en fonction du degré de $\mathcal{F}$. Ce problème est résolu dans des cas spéciaux contenant par exemple les courbes lisses ou plus généralement nodales ([**13**] et [**15**]) : $\deg \Gamma \leq \deg \mathcal{F} + 2$, et l'on conjecture que cette estimation est générale. Il ne faut pas croire pour autant que tout feuilletage de $\mathbb{CP}(2)$ possède une courbe algébrique invariante ; pour tout $n \geq 2$, Jouanolou construit dans [**25**] un feuilletage de degré n sur $\mathbb{CP}(2)$ ne possédant pas de courbe algébrique invariante (voir § 5.1). Ceci implique [**13**] que, dans l'ensemble $\mathcal{F}(2, n)$ des feuilletages de degré n sur $\mathbb{CP}(2)$ ($\mathcal{F}(2, n)$ est un ouvert de Zariski d'un espace projectif puisque à chaque $\mathcal{F} \in \mathcal{F}(2, n)$ est associé une 1-forme ω de degré $n+1$, $\omega = \sum a_i dx_i$, $\operatorname{pgcd}(a_0, a_2, a_3) = 1$ définie à scalaire multiplicatif près), l'ensemble de ceux qui ne possèdent pas de courbes algébriques invariantes contient un ouvert dense (pour la topologie ordinaire, celle des coefficients des polynômes a_i).

1.2.2. Problème du « minimal » [**7**]. — Ce problème tourne autour de la question suivante : si $\mathcal{L}$ est une feuille d'un feuilletage $\mathcal{F}$ sur $\mathbb{CP}(2)$, l'adhérence $\overline{\mathcal{L}}$ de $\mathcal{L}$ contient-elle un point singulier de $\mathcal{F}$? Par exemple si Γ est une courbe algébrique invariante de $\mathcal{F}$, alors Γ contient au moins un point singulier de $\mathcal{F}$ [**25**]. À ce jour la question ci-dessus reste ouverte ; elle en amène une autre, elle aussi ouverte : existe-t-il une hypersurface (réelle) $\Sigma \subset \mathbb{CP}(2)$ lisse qui soit plate au sens de Levi (si $m \in \Sigma$, l'espace tangent $T_m\Sigma \subset T_m\mathbb{CP}(2)$ contient une unique droite complexe E_m ; dire que Σ est plate au sens de Levi, c'est dire que le champ de plan $m \mapsto \Sigma_m$ est Frobenius intégrable). Les hypersurfaces plates au sens de Levi de $\mathbb{CP}(2)$, si elle existent, sont en effet, aux yeux des spécialistes, des candidats naturels à être adhérence de feuilles.

1.2.3. Problème des composantes. — On note $\Omega^1(n,d)$ l'espace vectoriel des 1-formes $\omega = \sum_{i=0}^n a_i dx_i$ sur $\mathbb{C}^{n+1}$ qui sont homogènes de degré $d+1$ et satisfont la condition $\sum x_i a_i = 0$. La condition d'intégrabilité $\omega \wedge d\omega = 0$ définit un sous ensemble algébrique $\Sigma(n,d)$:

$$\Sigma(n,d) := \big\{\omega \in \Omega^1(n,d) \mid \omega \wedge d\omega = 0\big\}$$

de $\Omega^1(n,d)$; c'est une intersection de quadriques. L'espace $\mathcal{F}(n,d)$ des feuilletages de degré d sur $\mathbb{CP}(n)$ s'identifie naturellement à un sous ensemble du projectivisé $\mathbb{P}\Sigma(n,d) \subset \mathbb{P}\Omega^1(n,d)$:

$$\mathcal{F}(n,d) \cong \mathbb{P}\big\{\omega \in \Sigma(n,d) \mid \omega = \sum a_i dx_i,\ \operatorname{pgcd}(a_0,\ldots,a_n) = 1\big\}.$$

Pour obtenir une description raisonnable de l'espace $\mathcal{F}(n,d)$ (par exemple pour parler de déformations) il serait raisonnable de connaître la décomposition en facteurs irréductibles de $\Sigma(n,d)$; pour $n=2$, $\Sigma(2,d) = \Omega^1(2,d)$ et la question est non triviale pour $n \geq 3$. Cette décomposition n'est connue ($n \geq 3$) que pour $d = 0, 1$ et 2. Pour $d=0$, il y a une seule composante : tout feuilletage de degré 0 est linéairement conjugué au feuilletage donné par $x_0 dx_1 - x_0 dx_1$ (livre ouvert ou pinceau d'hyperplans). En degré 1, il y a deux composantes Σ_0 et Σ_1 ; un point générique de Σ_0 produit, à conjugaison près, un feuilletage donné en coordonnées affines par $x_0 dx_1 - \lambda x_1 dx_0$, $\lambda \neq 1$. Un point générique de Σ_1 est toujours, à conjugaison linéaire près, donné en coordonnées affines par dQ où Q est la forme quadratique standard $Q = \sum_0^n x_i^2$. En degré 2, il y a six composantes et nous renvoyons le lecteur à [**16**].

On sait exhiber une certaine liste de composantes en tout degré mais cette liste est incomplète ; toutes les composantes connues sont unirationnelles *i.e.* paramétrées par un morphisme dominant $\mathbb{C}^N \to \Omega^1(n,d)$ [**16**].

1.3. Sur l'espace affine $\mathbb{C}^n$. — Considérons une 1-forme *fermée* rationnelle α sur l'espace affine $\mathbb{C}^n$. L'ensemble des pôles $\operatorname{Pol}(\alpha)$ de α est une hypersurface d'équation $P_1^{n_1+1} \cdots P_s^{n_s+1} = 0$ où les $P_i \in \mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$ et les $n_i + 1$ sont les multiplicités des pôles $P_i = 0$. L'analogue — un peu délicat — du théorème de décomposition des fonctions rationnelles en éléments simples assure l'existence de nombres complexes λ_i (les résidus de α) et d'un polynôme H tels que :

$$\alpha = \sum \lambda_i \frac{dP_i}{P_i} + d\frac{H}{P_1^{n_1} \cdots P_s^{n_s}} = d\Big[\sum \lambda_i \log P_i + \frac{H}{P_1^{n_1} \cdots P_s^{n_s}}\Big].$$

À la forme α est évidemment associé un feuilletage $\mathcal{F}(\alpha)$ (chasser les dénominateurs de α) qui en général a des singularités (les croisements $P_i = P_j = 0$ notamment). Les feuilles de $\mathcal{F}(\alpha)$ sont les composantes connexes des niveaux de la fonction multivaluée $\sum \lambda_i \log P_i + H/P_1^{n_1} \cdots P_s^{n_s}$. Même lorsque les P_i sont simples, par exemple sont de degré 1, la description qualitative de ces feuilles s'avère relativement complexe. Ce type d'exemple que l'on peut d'ailleurs voir sur $\mathbb{CP}(n)$ va jouer un rôle important dans la suite. Gardons en mémoire qu'une théorie de réduction des singularités de feuilletages devra contenir une théorie de réduction des singularités des formes fermées méromorphes.

1.4. Sur les variétés de Hopf. — Contentons-nous d'examiner le cas des variétés de Hopf les plus simples, *i.e.* le quotient $H(n,\lambda)$ de $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ par une homothétie $x \mapsto \lambda x$ de rapport λ avec $|\lambda| \neq 1$.

Si $\mathcal{F}$ est un feuilletage de codimension 1 sur $H(n,\lambda)$ on peut relever $\mathcal{F}$ en un feuilletage $\widetilde{\mathcal{F}}$ sur $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ équivariant sous l'action de λ. Comme dans la section 1.2, $\widetilde{\mathcal{F}}$ sera défini par une 1-forme globale $\underline{\omega} \in \Omega^1(\mathbb{C}^n \setminus \{0\})$ qui se prolonge en $\omega \in \Omega^1(\mathbb{C}^n)$. L'équivariance de $\widetilde{\mathcal{F}}$ par λ permet de choisir ω homogène à singularité isolée en 0, lorsque $\mathcal{F}$ n'a pas de singularités. La description que nous donnerons plus loin des formes homogènes permet de classifier les feuilletages sur $H(n,\lambda)$. Il est amusant de remarquer ici que certaines singularités de feuilletage permettent de construire des feuilletages sans singularités : pour $n=2$, la forme homogène ω a pour unique singularité l'origine qui disparaît par projection sur la surface de Hopf.

1.5. Sur les surfaces. — Les feuilletages non singuliers des surfaces complexes ont été récemment classifiés par Brunella dans [**3**]. Cette classification utilise de façon profonde les travaux de Kodaira ; les tores et variétés de Hopf y apparaissent bien sûr, le plan projectif non ; mais le plan projectif éclaté en un point (*cf.* 3.1) porte un feuilletage sans singularités : on considère le feuilletage radial en un point $0 \in \mathbb{CP}(2)$, dont les feuilles sont les droites passant par 0 et on éclate le point 0.

2. Germes de feuilletages

C'est la version locale de la définition initiale. On se place à l'origine de $\mathbb{C}^n$ et l'on note $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n,0)$ (*resp.* $\Omega^p(\mathbb{C}^n,0)$) l'anneau des germes de fonctions holomorphes (*resp.* le $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n,0)$ module des germes de p-formes holomorphes) à l'origine de $\mathbb{C}^n$. Un germe de feuilletage $\mathcal{F}$ en 0 se définit par la donnée de $\omega \in \Omega^1(\mathbb{C}^n,0)$, $\omega = \sum a_i dx_i$, $a_i \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n,0)$, satisfaisant à :

(i) $\omega \wedge d\omega = 0$,

(ii) $\operatorname{Sing}\omega = \{a_1 = \cdots = a_n = 0\}$ est de codimension ≥ 2.

Deux telles formes ω et ω' définissent le même $\mathcal{F}$ si et seulement si il existe une unité $g \in \mathcal{O}^*(\mathbb{C}^n,0)$ telle que $\omega = g\omega'$. Ceci équivaut à la condition $\omega \wedge \omega' = 0$, comme l'assure le lemme de de Rham-Saito [**40**] :

Lemme. — *Soit* $\alpha \in \Omega^1(\mathbb{C}^n,0)$ *tel que* $\operatorname{codim}\operatorname{Sing}\alpha \geq p+1$ *; les assertions suivantes sont équivalentes pour* $\beta \in \Omega^q(\mathbb{C}^n,0)$ *avec* $q \leq p$ *:*

(i) $\alpha \wedge \beta = 0$.

(ii) *Il existe* $\gamma \in \Omega^{q-1}(\mathbb{C}^n,0)$ *tel que* $\beta = \alpha \wedge \gamma$.

L'ensemble $\operatorname{Sing}\mathcal{F}$ est par définition $\operatorname{Sing}\omega$. On localise aussi la notion de feuilles.