

DYNAMIQUE DES POLYNÔMES QUADRATIQUES

par

Jean-Christophe Yoccoz,
notes rédigées par Marguerite Flexor

Résumé. — Décrire le système dynamique défini par une fonction holomorphe, c'est étudier le comportement des orbites obtenues après itération de cette fonction et décrire comment celles-ci sont distribuées dans le plan. Le cas le plus simple non trivial est le cas des polynômes d'une variable complexe de degré 2 qui est l'objet de ce texte. Cet article comporte trois paragraphes. Le premier est un survol de la théorie élémentaire du plan dynamique d'un polynôme et de l'espace des paramètres de la famille des polynômes quadratiques. Le second paragraphe est consacré aux aspects hyperboliques, autour du théorème de Jakobson. Le troisième paragraphe décrit les aspects quasi-périodiques, liés à des problèmes de petits diviseurs.

Introduction

Décrire le système dynamique défini par une fonction holomorphe, c'est étudier le comportement des orbites obtenues après itération de cette fonction et décrire comment celles-ci sont distribuées dans le plan. Ce programme a été inauguré en 1919 par G. Julia et P. Fatou. Après une longue période de somnolence, il a retrouvé en 1942 avec C. Siegel et ces vingt dernières années un renouveau d'activité.

Le cas le plus simple non trivial est celui des polynômes d'une variable complexe de degré deux. C'est l'objet de ce texte. Bien que la fonction considérée soit particulièrement simple, la dynamique associée peut s'avérer très compliquée et peut être modifiée très fortement après une légère perturbation de la fonction.

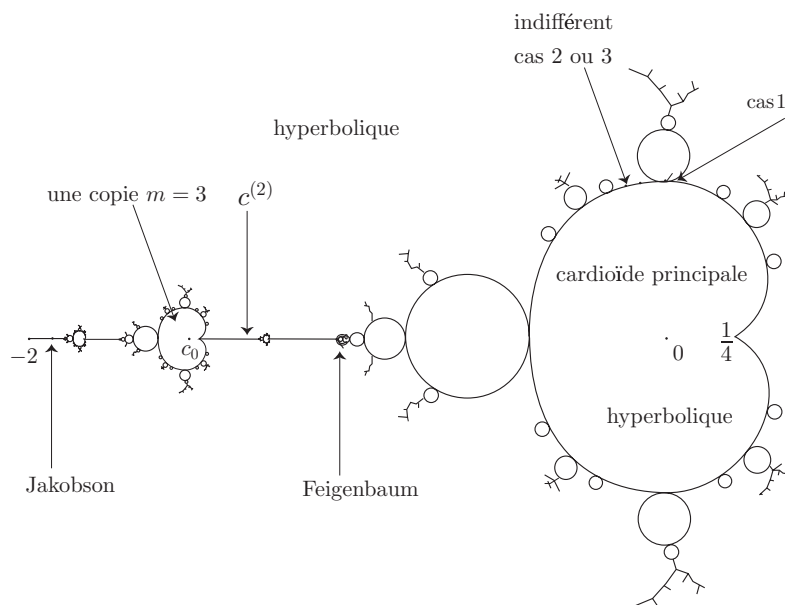
Par ailleurs, les résultats obtenus peuvent être réinvestis dans l'étude dynamique des polynômes de degré supérieur, des fractions rationnelles et plus généralement des fonctions holomorphes présentant des points critiques simples.

Classification mathématique par sujets (2000). — 58Fxx, 34Cxx, 30Fxx.

Mots clefs. — Ensemble de Julia, ensemble de Mandelbrot, application à allure polynomiale, renormalisation, hyperbolicité, linéarisabilité, fonction de Brjuno, compact invariant, hérissons, anneaux de Herman.

Cet article comporte trois paragraphes. Le premier est un survol très général de la théorie élémentaire dans le plan dynamique pour l'étude d'un seul polynôme et de la théorie élémentaire dans l'espace des paramètres pour l'étude de la famille de tous les polynômes quadratiques.

La figure 0 représente dans le plan des paramètres (en fait, ici, un seul paramètre complexe) le sous-ensemble appelé classiquement *ensemble de Mandelbrot*.



L'ensemble de Mandelbrot M schématisé

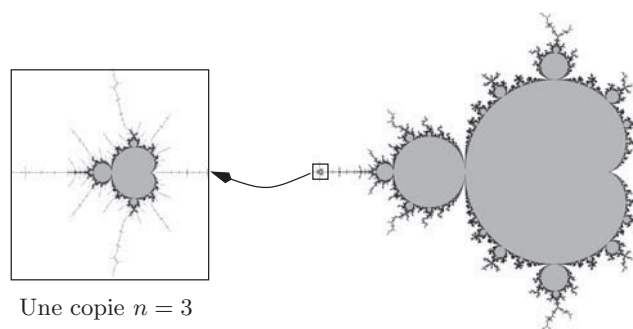


FIGURE 0. L'ensemble de Mandelbrot M

L'ensemble de Mandelbrot est l'ensemble des paramètres pour lesquels l'ensemble des points dont l'orbite reste bornée est connexe. On y a indiqué quelques uns des

phénomènes, que nous aborderons dans ce paragraphe, correspondant à diverses valeurs du paramètre. On a volontairement opéré des distorsions dans le dessin pour en améliorer la lisibilité. Ce premier paragraphe est aussi une introduction aux résultats et questions encore ouvertes qui seront développés par la suite.

Le second paragraphe est consacré aux aspects hyperboliques, autour du théorème de Jakobson. Le troisième paragraphe décrit les aspects quasi-périodiques, liés à des problèmes de petits diviseurs.

Le point de vue adopté ici privilégie plutôt les aspects dynamiques que les aspects géométriques ou analytiques et laisse donc de côté certaines questions importantes. Le but est de se concentrer sur des notions susceptibles de s'étendre à un cadre plus large.

Le texte qui suit ne fournit aucune démonstration des théorèmes profonds mentionnés, tout au plus pour certains une indication sur la démarche suivie ; les références pour leur démonstration se trouvent dans la bibliographie.

Précisons aussi que certaines des figures de ce texte sont des illustrations des phénomènes évoqués, destinées à la compréhension des quelques dessins réels.

1. Survol général

1.1. Plan dynamique et espace des paramètres. — Tout polynôme complexe de degré 2 est conjugué par une application affine à un polynôme de la forme

$$P_c(z) = z^2 + c.$$

Il suffit donc d'étudier la famille de polynômes (P_c) , pour $c \in \mathbb{C}$.

Pour $c \in \mathbb{C}$, on considère l'ensemble de Julia rempli

$$K_c = \{z, \sup_{n \geq 0} |P_c^n(z)| < +\infty\},$$

où $P_c^n = P_c \circ \dots \circ P_c$, n fois et que l'on peut décrire dans un premier temps de la manière suivante :

Soit $R = (1 + \sqrt{1 + 4|c|})/2$. Pour $|z| > R$, on a $|P_c(z)| > |z|$ et donc

$$K_c = \bigcap_{n \geq 0} P_c^{-n} \overline{\mathbb{D}(0, R)}.$$

En particulier :

- K_c est une intersection de parties compactes donc compact.
- K_c est non vide, tous les points périodiques, *i.e.* les points z pour lesquels il existe un entier $n > 0$ tel que $P_c^n(z) = z$, sont dans K_c .
- K_c est totalement invariant, *i.e.* $P_c(K_c) = K_c = P_c^{-1}(K_c)$.
- K_c est plein, *i.e.*, $\mathbb{C} \setminus K_c$ est connexe. En effet le principe du maximum assure que tout ouvert borné, dont le bord est dans K_c , est entièrement contenu dans K_c .

Le bord $J_c = \partial K_c$ est l'ensemble de Julia. D'après un théorème obtenu indépendamment par Julia et Fatou, J_c est aussi l'adhérence de l'ensemble des points fixes répulsifs. C'est la partie instable de la dynamique.

Exemple. — Pour $c = 0$, $P_0(z) = z^2$ et $K_0 = \overline{\mathbb{D}}$, $J_0 = \mathcal{S}^1 = \{z, |z| = 1\}$.

1.1.1. La fonction de Green de K_c . — Pour étudier un tel compact, on considère le potentiel G qu'il définit. Pour les ensembles de Julia, G est très facile à calculer. Comme P_c se comporte à l'infini comme $z \mapsto z^2$, la fonction

$$G_c(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{-n} \log^+ |P_c^n(z)|$$

est bien définie (où $\log^+ = |\log|$) et vérifie :

- (1) $G_c : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^+$ est continue ;
- (2) $G_c(P_c(z)) = 2 G_c(z)$;
- (3) $K_c = \{z \in \mathbb{C} \mid G_c(z) = 0\}$;
- (4) G_c est harmonique sur $\mathbb{C} \setminus K_c$: c'est la limite uniforme d'une suite de fonctions dont chacune est harmonique comme logarithme du module d'une fonction holomorphe ;
- (5) $G(z) = G_c(z) = \log |z| + O(|z|^{-2})$, $|z| \rightarrow +\infty$.

1.1.2. Points critiques de G_c dans $\mathbb{C} \setminus K_c$. — Le point critique 0 joue un rôle particulier dans la structure de K_c . D'après un théorème de Fatou datant de 1919, on a :

Cas 1. — Si $0 \in K_c$, G_c n'a pas de point critique dans $\mathbb{C} \setminus K_c$ et K_c est connexe.

Cas 2. — Si $0 \in \mathbb{C} \setminus K_c$, les points critiques de G_c sont 0 et toutes ses préimages (i.e., les points de $\bigcup_{n \geq 0} P^{-n}(0)$), $G_c(0)$ est la plus grande valeur critique et K_c n'est pas connexe. En fait, c'est un ensemble de Cantor comme nous le verrons en 1.2.

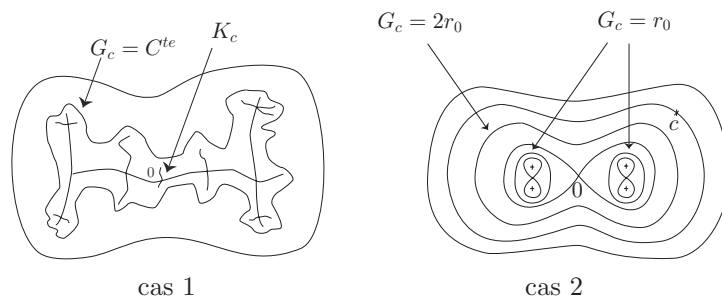


FIGURE 1

Posons $g_c(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (P_c^n(z))^{2^{-n}}$. Pour $|z|$ très grand, cette fonction est bien définie et vérifie l'équation fonctionnelle :

$$g_c(P_c(z)) = (g_c(z))^2.$$

Par suite, $g_c(z)$ est définie sur $\{z, G_c(z) > G_c(0)\}$ et vérifie :

- (1) $\log |g_c(z)| = G_c(z)$;
- (2) $g_c : \{z, G_c(z) > G_c(0)\} \rightarrow \{z, |z| > \exp G_c(0)\}$ est une représentation conforme ;
- (3) $g_c(z) = z + O(z^{-1})$, $|z| \rightarrow +\infty$.

En particulier, si K_c est connexe, l'application

$$\varphi_c = g_c^{-1} : \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus K_c$$

est une représentation conforme.

Dans l'espace des paramètres, considérons *l'ensemble de Mandelbrot*

$$M = \{c \in \mathbb{C}, K_c \text{ est connexe}\}$$

Pour $|c| > 2$ et $n > 0$, $|P_c^n(0)| \geq |c|(|c| - 1)^{2^{n-1}}$ et donc $P_c^n(0) \rightarrow \infty$; par conséquent c n'est pas dans M . En fait $M = \{c, |P_c^n(0)| \leq 2, n > 0\}$ et est donc compact. Par le principe du maximum, $\mathbb{C} \setminus M$ n'a pas de composante bornée et est donc connexe. Par suite, M est plein. De plus M est symétrique par rapport à l'axe réel qu'il rencontre suivant l'intervalle $[-2, 1/4]$.

Pour c dans $\mathbb{C} \setminus M$, K_c n'est pas connexe mais $G_c(c) > G_c(0) > 0$ et $g_c(c)$ est bien défini. Douady et Hubbard [5] ont montré que l'application

$$\varphi : \mathbb{C} \setminus M \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$$

définie par $\varphi(c) = g_c(c)$ est une représentation conforme.

Dans la suite de ce paragraphe, on parcourt le plan des paramètres c en décrivant la dynamique de P_c suivant l'endroit où l'on se trouve dans $\mathbb{C}$.

1.2. Dynamique pour $c \notin M$. — Soient $c \notin M$, $r_0 > 0$ tels que $r_0 < G_c(0) < 2r_0$ et $L = \{z, G_c(z) < 2r_0\}$. L'ensemble $P_c^{-1}(L) = \{z, G_c(z) < r_0\}$ a deux composantes connexes L_0, L_1 ne contenant pas le point critique 0, vérifiant $P_c(L_j) = L$ pour $j = 0, 1$ et contenant des points de K_c (sinon G_c serait harmonique et strictement positive sur L_j donc constante). De même $P_c^{-1}(L_j)$ a deux composantes connexes et ainsi de suite (voir figure 1, cas 2).

Comme c n'est pas dans L , l'application $f_j = P_{c|_{L_j}}^{-1} : L \rightarrow L_j$ est bien définie et contractante pour la métrique de Poincaré de L (lemme de Schwarz) et

$$K_c = \bigcap_{n \geq 0} P_c^{-n}(L_0 \cup L_1) = J_c$$

est un ensemble de Cantor.

Observons, dans ce cas, deux propriétés importantes :

- La dynamique pour $c \notin M$ est du type *décalage* (ou *shift*).