Panoramas & Synthèses
8, 1999, p. 49–95

LAMINATIONS PAR SURFACES DE RIEMANN

par

Étienne Ghys

Résumé. — La théorie des feuilletages tire en grande partie son origine de l'étude qualitative des équations différentielles ordinaires dans le domaine complexe. Depuis quelques années, le concept de lamination par surfaces de Riemann semble au cœur de la théorie des systèmes dynamiques holomorphes. Il s'agit de feuilletages généralisés dans le sens où l'espace ambiant n'est pas nécessairement une variété. Les feuilles, quant à elles, sont des surfaces de Riemann typiquement non compactes. Cet article se propose de décrire ce type d'objet, en insistant sur l'analogie avec les surfaces de Riemann compactes. On étudie en particulier le type conforme des feuilles et l'existence de fonctions méromorphes.

1. Introduction

Les *laminations par surfaces de Riemann* sont des généralisations feuilletées des surfaces de Riemann classiques que l'on rencontre dans un grand nombre de situations géométriques ou dynamiques. Le but de cet article est de décrire quelques résultats généraux concernant ces laminations en centrant la discussion autour des théorèmes fondamentaux sur les surfaces de Riemann :

Classification topologique. — Une surface de Riemann compacte est déterminée à homéomorphisme près par son genre.

Théorème d'uniformisation. — Toute surface de Riemann simplement connexe est biholomorphiquement équivalente à la droite projective complexe $\mathbb{CP}^1$, à la droite affine complexe $\mathbb{C}$ ou au disque unité $\mathbb{D}$.

Théorème de Riemann. — Toute surface de Riemann possède des fonctions méromorphes non constantes.

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 58F23, 57R30, 30F10.
Mots clefs. — Feuilletages, laminations, surfaces de Riemann, systèmes dynamiques holomorphes.

Dans quelle mesure ces théorèmes de base se généralisent-ils aux laminations par surfaces de Riemann ? Nous verrons qu'un certain nombre de résultats positifs sont encourageants mais que la situation générale n'est pas si simple...

Cet article contient peu de démonstrations et on n'y trouvera pas de résultat nouveau, à part dans le paragraphe 7. Nous nous inspirons de beaucoup de travaux que nous citerons au fur et à mesure et nous n'avons pas hésité à nous copier nous-même en adaptant des parties de [**23**]. Ce texte diffère peu de celui distribué aux participants de la session « État de la recherche » de janvier 1997 ; nous avons ajouté le paragraphe 6.4 en suivant une idée de R. Kenyon et nous avons corrigé quelques énoncés qui étaient parfois un peu « optimistes » dans la première version.

2. Exemples

Nous commençons par la définition des laminations par surfaces de Riemann.
On considère un espace métrique *compact* M recouvert par des ouverts U_i (que nous appellerons les *ouverts distingués*) munis d'homéomorphismes h_i de U_i sur $\mathbb{D} \times T_i$, où $\mathbb{D}$ est le disque unité dans $\mathbb{C}$ et T_i un certain espace topologique. On dit que ces ouverts définissent un *atlas* d'une structure de lamination par surfaces de Riemann sur M si les *changements de cartes* $h_{ij} = h_j \circ h_i^{-1}$, sur leur domaine de définition, sont de la forme :

$$h_{ij}(z, t) = (f_{ij}(z, t), \gamma_{ij}(t)),$$

où $f_{ij}(z, t)$ dépend holomorphiquement de la variable z et continûment de la variable t. Deux atlas sont équivalents si leur réunion est un atlas. Une *lamination par surfaces de Riemann* est un espace compact M muni d'une classe d'équivalence d'atlas $\mathcal{L}$.

On appelle *plaque* un ensemble de la forme $h_i^{-1}(\mathbb{D} \times \{t\})$. Les *feuilles* de $\mathcal{L}$ sont les plus petits ensembles connexes tels que, si une plaque les rencontre, elle y est entièrement contenue.

Parfois, nous écrirons simplement « lamination » au lieu de « lamination par surfaces de Riemann ».

On dit qu'une partie F de M est *saturée* si c'est une réunion de feuilles. Si F est fermée, la restriction de la lamination à F définit une structure de lamination sur F.

Un fermé F contenu dans M est appelé un *ensemble minimal* s'il est saturé, non vide, et s'il est minimal parmi les ensembles fermés possédant ces propriétés. Cela revient à dire que toute feuille contenue dans F est dense dans F. Par le lemme de Zorn, l'adhérence de toute feuille contient un ensemble minimal. On dit qu'une lamination est *minimale* si toutes ses feuilles sont denses, c'est-à-dire si l'espace ambiant M tout entier est un ensemble minimal.

Nous allons maintenant donner une série d'exemples. Il convient avant tout de remarquer qu'une surface de Riemann compacte connexe est une lamination qui possède un atlas pour lequel les espaces transverses T_i sont réduits à des points et qui ne possède qu'une seule feuille. Le problème discuté dans cet article est celui de savoir si cet « exemple trivial » est suffisamment significatif.

2.1. Les feuilletages de dimension 2. — Il s'agit du cas où M est une variété différentiable compacte et où les feuilles sont données par les surfaces intégrales d'un champ de plans orientable de dimension 2 complètement intégrable. Nous allons expliquer comment le choix d'une métrique riemannienne sur M permet de considérer ce feuilletage comme une lamination par surfaces de Riemann.

Pour cela, rappelons un théorème local démontré par Gauss dans le cas analytique réel, puis amélioré progressivement jusqu'à des hypothèses de régularité très faibles. Soit g une métrique riemannienne sur une surface orientée connexe S. Au voisinage de chaque point p de S, on peut introduire un système de *coordonnées isothermes*, c'est-à-dire un difféomorphisme *conforme* ϕ d'un voisinage de p sur un ouvert du plan euclidien. Bien entendu, deux tels difféomorphismes ϕ diffèrent par un difféomorphisme conforme d'un ouvert du plan euclidien, c'est-à-dire par un difféomorphisme holomorphe d'un ouvert de $\mathbb{C}$ (si l'on impose à ϕ de respecter l'orientation). Autrement dit, toute métrique riemannienne sur une surface orientée détermine naturellement une structure de *surface de Riemann*. Ce théorème dépend continûment de la métrique, c'est-à-dire que, si l'on dispose d'une famille de métriques riemanniennes sur une surface dépendant continûment d'un paramètre, les coordonnées isothermes dépendent continûment de ce paramètre [**3**]. Par conséquent, *la donnée d'une métrique riemannienne sur le fibré tangent aux feuilles d'un feuilletage orienté de dimension 2 définit naturellement une structure de lamination par surfaces de Riemann* sur ce feuilletage : il suffit d'appliquer le théorème que nous venons de citer dans des ouverts distingués pour le feuilletage.

Il existe beaucoup de méthodes de construction de feuilletages. Nous recommandons la lecture de [**24, 30**] pour des exemples. Nous allons nous contenter ici de quelques constructions dans le but d'illustrer la complexité de la situation.

Parmi les exemples les plus simples, il faut citer les feuilletages linéaires sur les tores. Partant du feuilletage de $\mathbb{R}^3$ dont les feuilles sont les plans parallèles à un plan donné Π, on passe au quotient par les translations entières de $\mathbb{Z}^3$ qui préservent évidemment ce feuilletage. Sur le tore quotient, on obtient un feuilletage dont les feuilles sont toutes homéomorphes à des plans si Π est « totalement irrationnel ».

Une méthode très générale pour construire des exemples est la *suspension*. Soit S une variété (qui sera une surface de Riemann compacte dans notre cas) et T une variété compacte. Considérons un homomorphisme h du groupe fondamental Γ de S vers le groupe des homéomorphismes de T. Le groupe Γ opère alors diagonalement sur le produit $\widetilde{S}\times T$ du revêtement universel de S et de T en préservant le feuilletage trivial dont les feuilles sont les $\widetilde{S}\times\{\star\}$. Par passage au quotient, on obtient une variété M qui fibre sur S avec fibres homéomorphes à T, munie d'un feuilletage $\mathcal{F}$ transverse à cette fibration. Les feuilles de ce feuilletage sont des revêtements de la base S et coupent les fibres T sur les orbites du groupe $h(\Gamma)$.

Par exemple, choisissons pour S une surface de Riemann compacte de genre 2 et soit π une surjection de son groupe fondamental sur un groupe libre à deux générateurs $L(\alpha,\beta)$. Si l'on choisit deux homéomorphismes a et b de T, on définit ainsi un homomorphisme de $L(\alpha,\beta)$ dans le groupe des homéomorphismes de T envoyant α sur a et β sur b. En composant avec π, on obtient un homomorphisme h de Γ vers le groupe des homéomorphismes de T et donc un feuilletage sur un fibré au dessus de S. Particularisons encore en choisissant pour T la droite projective $\mathbb{CP}^1$ et pour

α et β deux homographies qui engendrent un groupe kleinéen $G \subset \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$, dont l'ensemble limite $\Lambda \subset \mathbb{CP}^1$ est un ensemble de Cantor. La suspension est dans ce cas une surface complexe M, fibrée en $\mathbb{CP}^1$ au dessus de S, dont le groupe structural est réduit à G. Il résulte du théorème de plongement de Kodaira que M est une surface algébrique, c'est-à-dire qui se plonge holomorphiquement dans $\mathbb{CP}^N$ (voir [**27**]). Par ailleurs, à la partie G-invariante Λ de $\mathbb{CP}^1$ correspond un compact $X \subset M$ qui est saturé par le feuilletage et qui coupe chaque fibre sur un ensemble de Cantor. Ce compact X, équipé de la restriction $\mathcal{L}$ de $\mathcal{F}$, est un exemple typique de lamination minimale par surfaces de Riemann sur un espace qui n'est pas une variété. (La minimalité résulte du fait que toutes les orbites de l'ensemble limite d'un groupe kleinéen sont denses dans cet ensemble limite). Il existe un plongement de X dans $\mathbb{CP}^N$ qui est continu et holomorphe en restriction aux feuilles. En choisissant une projection générique, on peut même montrer que X se plonge dans $\mathbb{CP}^3$. En résumé, *il existe des laminations minimales, non réduites à une surface de Riemann, plongées holomorphiquement dans* $\mathbb{CP}^3$.

Bien entendu, si l'on projette génériquement ce dernier exemple sur un plan projectif $\mathbb{CP}^2$, les feuilles ne seront plus nécessairement plongées mais seulement immergées et on n'obtient pas une lamination dans $\mathbb{CP}^2$. *Nous ignorons s'il existe des laminations minimales plongées holomorphiquement dans* $\mathbb{CP}^2$ *qui ne se réduisent pas à une surface de Riemann compacte.* Cette question est une version forte de la question de l'existence d'un « minimal exceptionnel » pour les équations différentielles polynomiales dans $\mathbb{C}^2$ que nous allons rappeler ici car il s'agit de l'une des motivations pour l'étude systématique des laminations. Soient P et Q deux polynômes premiers entre eux en deux variables complexes et considérons l'équation différentielle ordinaire dans $\mathbb{C}^2$:

$$\frac{dx}{dt} = P(x,y); \quad \frac{dy}{dt} = Q(x,y).$$

En dehors des zéros communs de P et de Q, cette équation définit un feuilletage holomorphe dont les feuilles sont les solutions complexes. Lorsque l'on compactifie $\mathbb{C}^2$ en $\mathbb{CP}^2$, il n'est pas difficile de s'assurer que ce feuilletage se prolonge en un feuilletage holomorphe de $\mathbb{CP}^2$ en dehors d'un nombre fini de singularités. La question (dite « du minimal exceptionnel ») est de savoir si *l'adhérence de toute feuille contient un point singulier*. Ce problème a été beaucoup étudié et semble difficile (voir [**6, 8, 9**]) ; une réponse positive donnerait un analogue complexe au théorème classique de Poincaré-Bendixson qui décrit les ensembles limites des champs de vecteurs sur la sphère de dimension 2 réelle. Si une feuille du feuilletage polynomial de $\mathbb{CP}^2$ ne s'accumulait sur aucune singularité, son adhérence serait une lamination plongée et on pourrait considérer une sous-lamination minimale $\mathcal{L}$ contenue dans cette adhérence. Il est facile de vérifier que $\mathcal{L}$ ne peut pas se réduire à une surface de Riemann compacte : le fibré normal d'une feuille d'un feuilletage possède en effet une connexion plate donnée par l'holonomie et il en résulte que, si un feuilletage du type précédent dans $\mathbb{CP}^2$ avait une feuille compacte, celle-ci serait une surface de Riemann plongée dans $\mathbb{CP}^2$ d'auto-intersection nulle. Ceci contredit bien sûr le théorème de Bezout. Ainsi, *la question de l'existence d'une lamination minimale non triviale plongée dans* $\mathbb{CP}^2$ *est plus forte que celle du « minimal exceptionnel »*.

Voici un autre exemple de feuilletage de dimension 2, dû à M. Hirsch. Dans un tore solide $\overline{\mathbb{D}} \times \mathbb{S}^1$, on retire l'intérieur d'un tore solide, voisinage d'une tresse à deux brins par exemple (voir figure). On obtient ainsi une variété de dimension 3 dont le bord est constitué de deux tores. Cette variété est naturellement feuilletée par des « pantalons », c'est-à-dire des sphères moins trois disques. Ce feuilletage est transverse au bord et induit sur chaque composante du bord un feuilletage trivial, c'est-à-dire un feuilletage du tore dont les feuilles sont des cercles. En recollant les deux composantes connexes du bord par un difféomorphisme convenable, on obtient une variété fermée de dimension 3 munie d'un feuilletage de dimension 2. Les feuilles de ce feuilletage sont toutes homéomorphes à une sphère privée d'un ensemble de Cantor sauf celles qui correspondent aux « points périodiques » du recollement, qui ont un genre non nul.

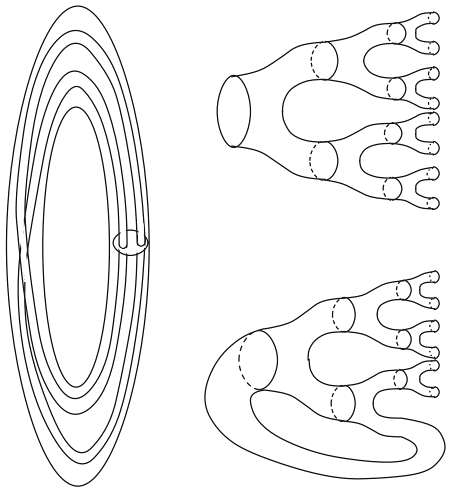

FIGURE 1

2.2. Systèmes dynamiques de dimension 1. — Nous allons décrire ici une méthode, due à D. Sullivan, qui permet d'associer une lamination à certains systèmes dynamiques de façon telle que les dynamiques sont conjuguées si et seulement si les laminations associées sont isomorphes [**44**].

Cette idée de coder une dynamique par un objet géométrique n'est pas nouvelle et nous commençons par en donner un exemple élémentaire. Soit $f : (\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ un germe de difféomorphisme holomorphe contractant. On lui associe la courbe elliptique E qui est le quotient d'un voisinage épointé assez petit de l'origine par l'action de f. Cette courbe complexe E est marquée, dans le sens où elle possède une classe d'homotopie privilégiée (celle qui correspond à f). Il est très facile de vérifier que deux germes sont holomorphiquement conjugués si et seulement si les courbes elliptiques marquées sont isomorphes. On peut procéder de la même manière en dimension