Panoramas & Synthèses
8, 1999, p. 97–185

DYNAMIQUE DES APPLICATIONS RATIONNELLES DE $\mathbb{P}^k$

par

Nessim Sibony

Résumé. — On se propose d'exposer les premiers éléments d'une théorie de Fatou-Julia pour les applications rationnelles dans $\mathbb{P}^k$. On considère essentiellement les aspects utilisant la théorie du pluripotentiel.

Étant donnée une application rationnelle dominante $f : \mathbb{P}^k \to \mathbb{P}^k$, on définit l'ensemble de Julia associé à f. On introduit ensuite un courant T de bidegré $(1, 1)$ positif fermé dont les propriétés : invariance, support, régularité, donnent des informations sur la dynamique de f.

Le second chapitre est consacré à l'étude des biholomorphismes polynomiaux réguliers de $\mathbb{C}^k$: points périodiques, entropie, mesure ergodique définie comme intersection de courants, variétés stables, domaines de Fatou-Bieberbach.

Au dernier chapitre on traite du cas des endomorphismes holomorphes de $\mathbb{P}^k$. Le support de T coïncide avec l'ensemble de Julia. La mesure $\mu := T^k$ est mélangeante et maximise l'entropie.

Introduction

L'étude dynamique des fractions rationnelles à une variable complexe fondée par Fatou, Julia et Léau a connu un regain d'activité important au cours des deux dernières décennies. Cela est dû en partie à la visualisation des ensembles de Julia par ordinateur. C'est à présent une théorie très développée.

En comparaison, la théorie de l'itération des applications rationnelles de l'espace projectif complexe $\mathbb{P}^k$ est encore balbutiante. Les problèmes qui la motivent sont pourtant bien naturels.

Soit $F = (P, Q)$ une application polynomiale de $\mathbb{C}^2$. Supposons qu'on veuille localiser les zéros de F, c'est à dire approcher les solutions du système d'équations

$$\begin{cases} P(z, w) = 0 \\ Q(z, w) = 0. \end{cases}$$

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 58F23, 32H50, 58F15, 58F11.
Mots clefs. — Dynamique holomorphe, ensembles de Julia dans $\mathbb{P}^k$, courants invariants, théorie du pluripotentiel, domaines de Fatou-Bieberbach, hyperbolicité dynamique.

La méthode de Newton consiste à itérer l'application

$$(z,w) \longmapsto (z,w) - (F'(z,w))^{-1} \circ F(z,w).$$

Si on passe en coordonnées homogènes dans $\mathbb{P}^2$, on est amené à étudier les itérées d'une application rationnelle de $\mathbb{P}^2$ dans $\mathbb{P}^2$. On vérifie que, génériquement sur (P,Q), on obtient une application méromorphe de $\mathbb{P}^2$ dans $\mathbb{P}^2$, qui admet des points d'indétermination. Notons qu'à une variable, les applications rationnelles de $\mathbb{P}^1$ dans $\mathbb{P}^1$ n'ont pas de point d'indététermination.

Une autre motivation est l'étude des applications de Hénon réelles. Considérons le difféomorphisme polynomial $h_{a,c}$ dans $\mathbb{R}^2$ défini par

$$(x,y) \longmapsto (x^2 + c + ay, x).$$

On sait depuis les études expérimentales de Hénon que, pour certaines valeurs des paramètres (a,c), *l'application de Hénon* $h_{a,c}$ présente des phénomènes dynamiques nouveaux. L'existence d'un « attracteur étrange » pour certaines valeurs des paramètres est à présent bien établie grâce aux travaux de Benedicks-Carleson [**12**]. Il est tentant de considérer les applications $h_{a,c}$ comme des biholomorphismes de $\mathbb{C}^2$ et d'en étudier la dynamique en utilisant les outils de l'analyse complexe. En fait, il est même utile de considérer les applications de Hénon en coordonnées homogènes

$$h_{a,c} : [z : w : t] \longmapsto [z^2 + ct^2 + awt : zt : t^2].$$

On voit que $h_{a,c}$ admet un point d'indétermination $I_+ = [0 : 1 : 0]$ et que $h_{a,c}^{-1}$ considérée comme application méromorphe dans $\mathbb{P}^2$ admet un point d'indétermination $I_- = [1 : 0 : 0]$. Le point I_- est attractif pour $h_{a,c}$ et I_+ est attractif pour $h_{a,c}^{-1}$. C'est cette propriété : $I_+ \cap I_- = \varnothing$, qui distingue les applications de Hénon généralisées parmi les automorphismes polynomiaux de $\mathbb{C}^2$. Les applications élémentaires

$$[z : w : t] \longmapsto [w^2 + ct^2 : azt : wt : t^2]$$

vérifient $I_+ = I_- = [1 : 0 : 0]$ et leur dynamique est très simple (chapitre 2).

Pour la théorie de l'itération des fractions rationnelles de $\mathbb{P}^1$, un outil de base est le théorème de Montel : une famille d'applications holomorphes du disque unité à valeurs dans $\mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\}$ est localement équicontinue. Les résultats correspondants, pour les applications holomorphes à valeurs dans $\mathbb{P}^k$ privé d'hypersurfaces, n'ont pas la même souplesse d'utilisation.

Ces notes traitent essentiellement de résultats qu'on peut obtenir à l'aide de techniques de théorie du pluripotentiel.

Étant donnée une application méromorphe dominante f de $\mathbb{P}^k$ dans $\mathbb{P}^k$, c'est-à-dire dont l'image contient un ouvert, on peut définir l'ensemble de Fatou de f comme le plus grand ouvert où la famille des itérées (f^n) est localement équicontinue. L'ensemble de Julia J est le complémentaire de l'ensemble de Fatou. Il s'agit d'introduire sur J des courants positifs fermés dynamiquement intéressants et de les analyser.

Donnons un aperçu de la théorie dans le cadre des polynômes d'une variable complexe. Dans ce cas, les courants considérés sont simplement des mesures positives. Soit

$$f_a(z) = z^d + a_1 z^{d-1} + \cdots + a_d$$

un polynôme de $\mathbb{C}$ de degré d, paramétré par $a \in \mathbb{C}^d$. Posons

$$K_a = \{z \in \mathbb{C} \mid \{f_a^n(z)\} \text{ borné}\}.$$

L'ensemble de Julia J_a est le bord de K_a. Notons ε_w la masse de Dirac en w. Brolin [**16**] avait montré que la mesure harmonique μ_a de K_a relativement au point à l'infini a des propriétés dynamiques remarquables. D'une part elle est mélangeante pour f_a, d'autre part, sauf pour au plus un point $w \in \mathbb{C}$, la suite des mesures ponctuelles

$$\frac{(f^n)^* \varepsilon_w}{d^n} = \frac{1}{d^n} \sum_{f^n(w_i)=w} \varepsilon_{w_i} \tag{1}$$

converge vaguement vers μ_a.

Tortrat [**81**] a montré que la suite de mesures

$$\nu_n = \frac{1}{d^n} \sum_{f^n(z)=z} \varepsilon_z. \tag{2}$$

converge également vers μ.

J'avais observé en 1981 ([**74**]) qu'on pouvait traiter des aspects de la théorie élémentaire de la dynamique des polynômes, sans faire appel au théorème de Montel mentionné plus haut. Ce qui en tient lieu est un théorème de compacité sur les fonctions sousharmoniques localement majorées (voir le théorème A.1.2). Posons

$$G(z,a) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{d^n} \log^+ |f_a^n(z)|. \tag{3}$$

On montre que cette limite existe et qu'elle définit une fonction plurisousharmonique continue dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^d$. Elle satisfait l'équation fonctionnelle

$$G(f_a(z), a) = dG(z,a). \tag{4}$$

On a de plus

$$K_a = \{z \mid G(z,a) = 0\}.$$

De plus la fonction G est pluriharmonique (localement partie réelle d'une fonction holomorphe) hors du fermé

$$\mathcal{K} = \{(z,a) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^d \mid z \in K_a\}.$$

Pour a fixé, $G(\cdot, a)$ est la fonction de Green dans $\mathbb{C}$ du compact de K_a avec pôle à l'infini. Si Δ_z désigne le laplacien par rapport à z, on a

$$\mu_a = \Delta_z(G(z,a)).$$

C'est la mesure harmonique considérée par Brolin.

L'ensemble de Julia apparaît comme le support de μ_a. C'est l'ensemble des points adhérents à $\{G_a > 0\}$, au voisinage desquels la fonction G_a n'admet pas de prolongement harmonique. Des résultats élémentaires de théorie du potentiel entraînent que l'ensemble de Julia est parfait.

L'équation fonctionnelle (4) permet de montrer qu'en fait la fonction $G(\cdot, a)$ est localement höldérienne. On en déduit, toujours parce que J_a est le support de μ_a, des estimations de la dimension de Hausdorff locale de l'ensemble de Julia.

Les points critiques de $G(\cdot, a)$ rendent compte des propriétés de connexité de J_a. En dérivant l'équation (4) dans $(G(z, a) > 0)$ où la fonction G est harmonique, on obtient le résultat classique : si les points critiques de f_a sont dans K_a, alors le bord J_a de K_a est connexe. Pour la théorie de l'itération à une variable complexe, nous renvoyons à la monographie de Carleson-Gamelin in [**18**]

La continuité, par rapport au paramètre a, de la fonction $G(z, a)$ montre que la mesure μ_a varie continûment, bien que les ensembles de Julia J_a ne varient pas continûment pour la distance de Hausdorff sur les compacts.

Pour établir la distribution des images réciproques d'un point w, on est amené à étudier la convergence de la suite de fonctions sousharmoniques

$$u_n(z) = \frac{1}{d^n} \log |f_a^n(z) - w|.$$

On montre que la suite u_n converge vers G_a. De même, l'approximation de la mesure μ_a par des masses de Dirac placées aux points périodiques provient de l'étude de la convergence vers G_a de la suite de fonctions sousharmoniques.

$$v_n(z) = \frac{1}{d^n} \log |f_a^n(z) - z|.$$

Ces notions se généralisent à plusieurs variables. C'est Hubbard [**50**] qui a eu l'idée de considérer la fonction de Green des applications de Hénon. Pour une application de Hénon h, il a défini

$$G^{\pm}(z, w) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \log^+ |h^{\pm n}(z, w)|,$$

et il a montré que G^+ et G^- sont des fonctions plurisousharmoniques dans $\mathbb{C}^2$, pluriharmoniques en dehors des ensembles

$$K^{\pm} = \{(z, w) \mid \{h^{\pm n}(z, w)\} \text{ borné}\}.$$

Le compact

$$K = K^+ \cap K^-$$

est l'ensemble des points dont les itérés h^n et h^{-n}, $n \geq 0$, sont bornés.

On a $K^+ = \{G^+ = 0\}$ et $K^- = \{G^- = 0\}$. La fonction $G = \sup(G^+, G^-)$ s'annule exactement sur K. La fonction G^+ mesure la rapidité de convergence vers l'infini [**50**].

Il était naturel d'envisager l'étude dynamique des courants positifs fermés

$$T_+ := dd^c G^+, \quad T_- := dd^c G^-$$

et de la mesure

$$\mu := (dd^c)^2 G.$$

Ici $(dd^c)^2$ désigne l'opérateur de Monge-Ampère. Le courant T_+ est porté par le bord de K^+, c'est-à-dire par l'ensemble des points au voisinage desquels la fonction G^+ n'est pas pluriharmonique.

Les premières propriétés de ces courants et de μ ont été établies conjointement avec E. Bedford. Certaines d'entre elles apparaissent dans [**7**]. La théorie des applications de Hénon complexes a été développée dans de nombreux travaux par Bedford-Smillie [**6, 7, 8, 9**], Bedford-Smillie-Lyubich [**3, 4**]. Hubbard-Oberste-Vorth [**51**], Fornæss et l'auteur [**27, 29**].

Bedford-Smillie-Lyubich ont montré en particulier que la mesure invariante μ maximise l'entropie et est limite de masses de Dirac aux points périodiques hyperboliques.

L'ensemble de Julia de h a une certaine rigidité. On montre dans [**29**] que les seuls courants positifs fermés dont le support est dans K^+ sont proportionnels à T_+. Cette propriété d'unicité peut se comprendre heuristiquement, en disant que les variétés stables qui laminent ∂K^+ forcent le courant a être égal T_+.

L'étude des applications de Hénon dans $\mathbb{C}^2$ est sans doute l'aspect le plus développé de la théorie des applications holomorphes. Le fait que les applications soient algébriques est responsable de la rigidité des objets qu'on construit. Notons par exemple que, pour un automorphisme transcendant de $\mathbb{C}^k$, l'ensemble

$$K_f = \{z \in \mathbb{C}^k \mid \{f^n(z)\} \text{ borné}\}$$

peut être partout dense et différent de $\mathbb{C}^k$. Nous renvoyons pour l'étude dynamique des applications transcendantes au survey de Fornæss [**26**].

On peut se poser la question : pourquoi introduire des courants positifs fermés dans l'étude de la dynamique des applications rationnelles ?

Considérons l'exemple très simple de l'endomorphisme f de $\mathbb{P}^2$ défini par

$$f[z : w : t] = [z^2 : w^2 : t^2].$$

Il est de degré algébrique 2 et de degré topologique 4. Il admet trois points fixes attractifs : les points $[0 : 0 : 1]$, $[1 : 0 : 0]$ et $[0 : 1 : 0]$. La réunion de leurs bassins d'attraction constitue l'ensemble de Fatou. Son bord est l'ensemble de Julia. Plaçons nous dans la carte $\{t \neq 0\}$. On est dans $\mathbb{C}^2$ et le bassin d'attraction au point $[0 : 0 : 1]$ est le polydisque $D^2 = \{|z| < 1, |w| < 1\}$. Son bord est constitué par

$$A_1 = \{z = e^{i\theta}, |w| < 1\}, \quad A_2 = \{w = e^{i\varphi}, |z| < 1\}, \quad A_3 = \{z = e^{i\theta}, w = e^{i\varphi}\}.$$

L'ouvert A_1 de l'ensemble de Julia est feuilleté par les variétés stables correspondant aux points du cercle $|z| = 1$. Le cercle $\{w = 0, |z| = 1\}$ est invariant. Les points périodiques y sont denses et la mesure mélangeante qui décrit leur distribution est la mesure de Lebesgue. Chaque point a une variété stable qui est une réunion de disques