

Huanchen BAO
Weiqiang WANG

**A NEW APPROACH TO
KAZHDAN-LUSZTIG THEORY OF
TYPE *B* VIA QUANTUM
SYMMETRIC PAIRS**

ASTÉRISQUE 402

Société Mathématique de France 2018

Astérisque est un périodique de la Société mathématique de France

Numéro 402

Comité de rédaction

Ahmed ABBES	Hélène ESNAULT
Viviane BALADI	Philippe EYSSIDIEUX
Laurent BERGER	Michael HARRIS
Philippe BIANE	Alexandru OANCEA
Nicolas BURQ	Fabrice PLANCHON
Damien CALAQUE	
Éric VASSEROT (dir.)	

Diffusion

Maison de la SMF – Cellule de diffusion	AMS
Case 916 – Luminy	P.O. Box 6248
13288 Marseille Cedex 9	Providence RI 02940
France	USA
commandes@smf.emath.fr	www.ams.org

Tarifs 2018

Vente au numéro : 60 € (\$ 90)

Abonnement électronique : 500 € (\$ 750)

Abonnement avec supplément papier : 657 €, hors Europe : 699 € (\$ 1049)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat

Astérisque
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
asterisque@smf.emath.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2018

Tous droits réservés (article L122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L335-2 et suivants du CPI.

ISSN 0303-1179 (print) 2492-5926 (electronic)

ISBN 978-2-85629-889-3

Stéphane SEURET
Directeur de la publication

ASTÉRIQUE 402

**A NEW APPROACH TO
KAZHDAN-LUSZTIG THEORY OF
TYPE B VIA QUANTUM
SYMMETRIC PAIRS**

**Huanchen BAO
Weiqiang WANG**

Société Mathématique de France 2018
Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

HUANCHEN BAO

Department of Mathematics, University of Maryland, College Park, MD
20742.

E-mail : `huanchen@math.umd.edu`

WEIQIANG WANG

Department of Mathematics, University of Virginia, Charlottesville, VA
22904.

E-mail : `ww9c@virginia.edu`

2010 Mathematics Subject Classification. — 17B10, 17B20, 17B37.

Key words and phrases. — Kazhdan-Lusztig theory, Lie superalgebras, canonical bases, quantum symmetric pairs.

A NEW APPROACH TO KAZHDAN-LUSZTIG THEORY OF TYPE B VIA QUANTUM SYMMETRIC PAIRS

Huanchen BAO, Weiqiang WANG

Abstract. — We show that Hecke algebra of type B and a coideal subalgebra of the type A quantum group satisfy a double centralizer property, generalizing the Schur-Jimbo duality in type A . The quantum group of type A and its coideal subalgebra form a quantum symmetric pair. A new theory of canonical bases arising from quantum symmetric pairs is initiated. It is then applied to formulate and establish for the first time a Kazhdan-Lusztig theory for the BGG category \mathcal{O} of the ortho-symplectic Lie superalgebras $\mathfrak{osp}(2m+1|2n)$. In particular, our approach provides a new formulation of the Kazhdan-Lusztig theory for Lie algebras of type B/C .

Résumé (Une nouvelle approche à la théorie de Kazhdan-Lusztig de type B via les paires symétriques)

On démontre que les algèbres de Hecke de type B et des coidéaux du groupes quantiques de type A satisfont une propriété de double centralisateur qui généralise la dualité de Schur-Jimbo en type A . Le groupe quantique de type A et son coidéale forment une paire symétrique quantique. Une nouvelle théorie des bases canoniques associées aux paires symétriques quantiques est développée. Elle est appliquée pour formuler et établir une théorie à la Kazhdan-Lusztig pour la catégorie \mathcal{O} de BGG de la super-algèbre de Lie ortho-symplectique $\mathfrak{osp}(2m+1|2n)$. Notre approche donne en particulier une nouvelle formulation de la théorie de Kazhdan-Lusztig pour les algèbres de Lie de type B/C .

CONTENTS

Introduction	1
1. Background	1
2. The goal	2
3. An overview of Part I	3
4. An overview of Part II	5
5. Some future works	7
6. Organization	8
Part I. Quantum symmetric pairs	13
1. Preliminaries on quantum groups	15
1. The involution θ and the lattice Λ_θ	15
2. The algebras $'\mathfrak{f}$, \mathfrak{f} and \mathbf{U}	16
3. Braid group action and canonical basis	18
4. Quasi- \mathcal{R} -matrix Θ	20
2. Intertwiner for a quantum symmetric pair	23
1. Definition of the algebra \mathbf{U}^t	23
2. Quantum symmetric pair $(\mathbf{U}, \mathbf{U}^t)$	24
3. The intertwiner Υ	27
4. Constructing Υ	29
5. The isomorphism \mathcal{T}	35
3. Quasi-\mathcal{R}-matrix for a quantum symmetric pair	37
1. Definition of Θ^t	37
2. Normalizing Θ^t	38
3. Properties of Θ^t	42
4. The bar map on \mathbf{U}^t -modules	44
4. The integrality of Υ and the ι-canonical basis of ${}^\omega L(\lambda)$	47
1. The homomorphism $\pi_{\lambda, \mu}$	47
2. The ι -canonical bases at rank one	50
3. Integrality at rank one	54
4. The integrality of Υ	56
5. The ι -canonical basis of a based \mathbf{U} -module	58

5. The $(\mathbf{U}^l, \mathcal{H}_{B_m})$-duality and compatible bar involutions	61
1. Schur-Jimbo duality	61
2. The $(\mathbf{U}^l, \mathcal{H}_{B_m})$ -duality	63
3. Bar involutions and duality	65
6. The quantum symmetric pair $(\mathbf{U}, \mathbf{U}^J)$	69
1. The coideal subalgebra \mathbf{U}^J	69
2. The intertwiner Υ and the isomorphism \mathcal{T}	71
3. Quasi- \mathcal{R} matrix on \mathbf{U}^J	72
4. The J -involutive modules	73
5. Integrality of Υ	74
6. The J -canonical basis of ${}^\omega L(\lambda)$	75
7. The $(\mathbf{U}^J, \mathcal{H}_{B_m})$ -duality	76
Part II. Representation theory	79
7. BGG categories for ortho-symplectic Lie superalgebras	81
1. The Lie superalgebra $\mathfrak{osp}(2m+1 2n)$	81
2. Infinite-rank Lie superalgebras	84
3. The BGG categories	86
4. Truncation functors	89
8. Fock spaces and Bruhat orderings	91
1. Infinite-rank constructions	91
2. The Fock space \mathbb{T}^b	92
3. The q -wedge spaces	94
4. Bruhat orderings	96
9. ι-Canonical bases and Kazhdan-Lusztig-type polynomials	101
1. The B -completion and Υ	101
2. ι -Canonical bases	103
3. Bar involution and q -wedges of \mathbb{W}	105
4. Truncations	108
5. Bar involution and q -wedges of \mathbb{V}	110
10. Comparisons of ι-canonical bases in different Fock spaces	111
1. Tensor versus q -wedges	111
2. Adjacent ι -canonical bases	112
3. Combinatorial super duality	114
11. Kazhdan-Lusztig theory of type B and ι-canonical basis	117
1. Grothendieck groups and Fock spaces	117
2. Comparison of characters	119
3. Translation functors	120

4. Classical KL theory reformulated	122
5. Super duality and Fock spaces	123
6. ι -KL theory for \mathfrak{osp}	124
12. BGG category of $\mathfrak{osp}(2m+1 2n)$-modules of half-integer weights ..	127
1. Setups for half-integer weights	127
2. Fock spaces and J -canonical bases	128
3. KL theory and J -canonical basis	129
Bibliography	131

