Structures spéciales et problème de Zilber-Pink

Emmanuel Ullmo

Panoramas et Synthèses

Numéro 52

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

Panoramas & Synthèses
52, 2017, p. 1–30

STRUCTURES SPÉCIALES ET PROBLÈME DE ZILBER-PINK

par

Emmanuel Ullmo

Résumé. – Les conjectures de Manin-Mumford, André-Oort ainsi que celle de Zilber-Pink portent sur des variétés algébriques (tores algébriques, variétés abéliennes ou semi-abéliennes, variétés de Shimura pures ou mixtes) qui possèdent un sous ensemble naturel de points spéciaux et de sous-variétés spéciales. Le texte propose une axiomatisation, dans l'esprit de la théorie des modèles, des variétés algébriques possédant un ensemble de points spéciaux et de sous-variétés spéciales vérifiant des propriétés naturels en insistant sur les aspects bi-algébriques de la question. Dans un deuxième temps l'article fait le point sur les résultats récents sur cet ensemble de conjectures.

***Abstract* (Special structures and Zilber-Pink problem).** – The Manin-Mumford and the André-Oort conjectures as well as the one formulated by Zilber and Pink concern algebraic varieties (algebraic tori, Abelian or semi-Abelian varieties, pure or mixed Shimura varieties) endowed with a natural set of special points and special subvarieties. An axiomatisation, in the spirit of model theory, is presented for a description of algebraic varieties endowed with a natural set of special points and special subvarieties with an emphasis on the bi-algebraic nature of the question. The text also reviews recent results on these conjectures.

1. Introduction

Au cours des dernières années une activité intense s'est développée autour des propriétés arithmétiques et géométriques des sous-variétés spéciales des tores algébriques, des variétés abéliennes et des variétés de Shimura. Boris Zilber [**86**] et Richard Pink ([**55**], [**56**]), avec des motivations très éloignées, ont dégagé l'énoncé d'une conjecture « d'intersections atypiques » pour les variétés de Shimura mixtes ou les variétés semi-abéliennes qui généralise la conjecture de Manin-Mumford pour les variétés abéliennes et la conjecture d'André-Oort pour les variétés de Shimura. Les premiers résultats dans la direction de ces énoncés au delà des questions de type Manin-Mumford ou André-Oort sont dus à Bombieri, Masser et Zannier [**8**]. Une session des « États de la

***Classification mathématique par sujets* (2000).** – 14G35, 03C64, 11J81.
Mots clefs. – Bi-algébricité, conjecture de Zilber-Pink, transcendance fonctionnelle, o-minimalité.

recherche » de la Société Mathématique de France (SMF) consacrée à ces problèmes a été organisée au CIRM en mai 2011 et les textes qui composent cet ouvrage se proposent de faire le point sur les progrès récents concernant ces questions et de tracer quelques perspectives d'avenir.

Dans la première partie de cette introduction nous essayons d'expliquer dans quelle situation une variété algébrique possède un ensemble de points spéciaux et un ensemble de sous-variétés spéciales de dimension positive pour lesquels les problèmes de type Manin-Mumford-André-Oort ou Zilber-Pink sont à la fois vraisemblables et intéressants. On développe une approche inspirée de la théorie des modèles et on insiste tout particulièrement sur l'interprétation **bi-algébrique** des sous-variétés spéciales et des points spéciaux. On fait ensuite le point sur les résultats récents sur la conjecture d'André-Oort par la méthode de Pila-Zannier et l'on conclut par une discussion rapide sur quelques résultats dans la direction de Zilber-Pink.

Remerciements. – C'est un plaisir de remercier Yves André, Daniel Bertrand, Jean-Benoît Bost, Marc Hindry, Ehud Hrushovski, Bruno Klingler, Michel Waldschmidt et Andrei Yafaev pour des discussions éclairantes et des remarques mathématiques et typographiques.

L'un des rapporteurs de cet article m'a donné des indications bibliographiques précieuses concernant le théorème 2.8 et m'a fourni l'énoncé et la preuve du théorème 2.9 ainsi que celle du théorème 2.10. Sa lecture détaillée m'a aussi permis d'améliorer plusieurs points du texte et je lui adresse tous mes remerciements.

2. Une version abstraite de la conjecture de Zilber-Pink

2.1. Variétés algébriques munies d'une structure spéciale. – Le but de cette partie est d'abstraire les propriétés essentielles des sous-variétés spéciales d'une variété abélienne, d'une variété de Shimura ou plus généralement d'une variété de Shimura mixte et de formuler le problème de Zilber-Pink dans ce cadre. Nous essayons dans un premier temps de dégager le cadre naturel des variétés algébriques intéressantes ayant des sous-variétés spéciales naturelles pour lesquelles les problèmes de type Manin-Mumford-André Oort ou Zilber-Pink soient à la fois conjecturalement vrais et non triviaux. Le lecteur est encouragé à regarder le texte de Boris Zilber [**87**] qui explore une thématique similaire du point de vue de la théorie des modèles et du principe de trichotomie de Zilber.

Soit V une variété quasi-projective sur $\mathbb{C}$ de dimension n. On dit que V est munie d'une *pré-structure spéciale* si l'on dispose d'un ensemble dénombrable $\Sigma(V)$ de sous-variétés irréductibles de V appelé sous-variétés spéciales de V ayant les propriétés suivantes.

(i) V est spéciale.

(ii) Une composante irréductible d'une intersection de sous-variété spéciales est une sous-variété spéciale.

(iii) Soit $\Sigma_i(V)$ l'ensemble des sous-variétés spéciales de dimension i. Les éléments de $\Sigma_0(V)$ sont appelés points spéciaux de V. Pour tout $Z \in \Sigma(V)$, les points spéciaux de Z sont Zariski denses dans Z.

Dans tous les cas que nous avons en vue on dispose d'une pré-structure spéciale sur V^r pour tout entier positif r telle que :

(a) $\Sigma_0(V^r) = \Sigma_0(V)^r$.

(b) Pour tout r-uplets d'entiers $(a_1, \ldots, a_r)$ tels que $a = \sum_{i=1}^n a_i$, on a

$$\prod_{i=1}^{r} \Sigma_{a_i}(V) \subset \Sigma_a(V^r).$$

(c) L'ensemble $\Sigma_n(V^2)$ contient une infinité dénombrable de correspondances algébriques de V.

Dans ce texte une correspondance algébrique de V est une sous-variété algébrique W de V^2 telle que les projections de W sur les facteurs sont finies et surjectives.

Définition 2.1. – *Une variété algébrique V quasi-projective sur $\mathbb{C}$, de dimension positive n, est dite munie d'une* structure spéciale *si on dispose pour tout entier positif r d'une pré-structure spéciale sur V^r vérifiant les propriétés* (a), (b) *et* (c) *précédentes telle que pour toute sous-variété spéciale W de V, de dimension positive, les sous-variétés spéciales de $W^r \subset V^r$ vérifient aussi les propriétés* (a), (b) *et* (c).

D'après la propriété (ii), *si W est une sous-variété irréductible de V, il existe une unique plus petite sous-variété spéciale $Sp(W)$ de V qui contient W. On dit que W est Hodge générique si $Sp(W) = V$. En particulier un point P de V est dit Hodge générique si il n'est contenu dans aucune sous-variété spéciale propre de V.*

Les exemples principaux de variétés algébriques sur $\mathbb{C}$, munies d'une structure spéciale sont

(i) Un tore algébrique T. Les points spéciaux sont alors les points d'ordre fini et les sous-variétés spéciales sont les sous-variétés de torsion zT', produit d'un point d'ordre fini z par un sous-tore T' de T.

(ii) Une variété abélienne A. Les points spéciaux sont alors les points de torsion et les sous-variétés spéciales sont les sous-variétés de torsion $P + B$, translatées d'une sous-variété abélienne B de A par un point de torsion P.

(iii) Une variété semi-abélienne W extension d'une variété abélienne A par un tore T. Les points spéciaux sont alors les points d'ordre fini et les sous-variétés spéciales sont les translatées par un point spécial d'un sous-groupe algébrique. Cet exemple généralise les cas (i) et (ii).

(iv) Une variété de Shimura pure ou mixte S. Le cas pur est détaillé dans le texte **[72]** de ce volume et nous renvoyons à la thèse de Pink **[54]**, ou aux travaux de Gao **[24]** pour des définitions plus précises dans le cas mixte. Le cas central de la variété abélienne universelle $\mathscr{U}_g$ au dessus de l'espace de modules grossiers $\mathscr{A}_g$ des variétés abéliennes principalement polarisées de dimension g est discuté dans la section 2.2.5.

Les sous-variétés spéciales sont alors les composantes irréductibles des translatées par un opérateur de Hecke d'une sous-variété de Shimura.

On peut montrer que toute variété semi-abélienne se réalise comme sous-variété d'une variété de Shimura mixte **[55]** remarque 2.13.

Comme un produit fini de variétés semi-abéliennes est une variété semi-abélienne et un produit fini de variété de Shimura mixtes est une variété de Shimura mixte on vérifie sans peine que ce sont des exemples de variétés algébriques munies d'une structure spéciale. Seule la condition (c) sur les correspondances méritent une explication. Explicitons le cas d'une variété abélienne et le cas des variétés de Shimura pures.

Soit A une variété abélienne et soit α un endomorphisme de A. En prenant pour α la multiplication par un entier n on voit que l'on dispose d'un ensemble dénombrable de tels endomorphismes. Soit

$$A_\alpha \subset A \times A$$

le graphe de α. Alors A_α est une correspondance algébrique de $A \times A$ qui est une sous-variété spéciale de $A \times A$.

Soit S une variété de Shimura pure. Les correspondances de Hecke fournissent un ensemble dénombrable infini de correspondances de S qui sont des sous-variétés spéciales de $S \times S$.

Remarque 2.2. – *Je ne sais pas si la condition portant sur les sous-variétés spéciales W de V est automatique. Seule la propriété* (c) *ne l'est pas de manière évidente.*

- *Il est très naturel du point de vue de la théorie des modèles ou des géométries de Zariski de considérer des structures spéciales sur V^r pour tout entier r. Les sous-variétés spéciales se comportent alors comme les ensembles définissables de la théorie. La condition sur les correspondances assure que V est muni de structures supplémentaires (endomorphismes, correspondances de Hecke) et les sous-variétés spéciales sont, au moins dans les exemples que nous avons en vue, celles qui héritent de cette structure supplémentaire.*
- *Dans l'esprit de la théorie des catégories, on peut définir les morphismes entre sous-variétés spéciales. Soit Y une sous-variété de V^r et Z une sous-variété de V^s. On dit qu'un morphisme algébrique $\phi : Y \to Z$ est spécial si le graphe de ϕ est spécial dans V^{r+s}. Il serait intéressant de rédiger une preuve que l'on retrouve bien pour les variétés de Shimura et les variétés semi-abéliennes la notion usuelle de morphismes.*
- *Dans les exemples que nous avons en tête, les variétés munies de structures spéciales admettent des revêtements finies de degrés arbitrairement grands non ramifiés en dehors d'un ouvert fixe par des variétés qui sont elles mêmes munies d'une structure spéciale. Si $f_N : V_N \to V$ est un tel revêtement, l'image par f_N d'une sous-variété spéciale de V_N est spéciale et une composante de l'image inverse par f_N d'une sous-variété spéciale de V est spéciale dans V_N. Dans les situations classiques (variétés semi-abéliennes, variétés de Shimura mixtes) $V_N \times V$ est aussi une variété semi-abélienne ou une variétés de Shimura mixte selon le cas et possède donc une structure spéciale naturelle. Dans cette situation*