

Généralisations du problème de Lehmer et applications à la conjecture de Zilber-Pink

Gaël Rémond



Panoramas et Synthèses

Numéro 52

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

GÉNÉRALISATIONS DU PROBLÈME DE LEHMER ET APPLICATIONS À LA CONJECTURE DE ZILBER-PINK

par

Gaël Rémond

Résumé. – Nous proposons une présentation unifiée des différents énoncés de minoration de hauteur qui trouvent leur source dans le problème de Lehmer. Elle englobe les versions sur les tores multiplicatifs, les variétés abéliennes, les variantes dites relatives ainsi que le problème de Bogomolov effectif. Cette approche suggère une conjecture dont la formulation est nouvelle même dans le cadre classique des nombres algébriques. Nous examinons ensuite comment ces minoration de hauteur s'appliquent à la conjecture de Zilber-Pink : quitte à retirer un ensemble exceptionnel convenable, l'intersection considérée vérifie une propriété de Northcott et il suffit donc de borner la hauteur pour montrer la finitude.

Abstract (Generalizations of the Lehmer problem and applications to the Zilber-Pink conjecture)

After a classical introduction to heights, we discuss various generalisations of Lehmer's problem. The framework is that of normalized heights on abelian varieties and tori. We include the study of obstruction indices, relative at the same time to an arbitrary ground field and to an algebraic subgroup. We introduce the notion of a Lehmer group to unify our statements. Usual examples correspond to the trivial group (classical Lehmer's problem), the torsion group (relative Lehmer's problem) or the whole group of algebraic points (effective Bogomolov's problem) but we show that also all finite rank subgroups are of interest, even in the one-dimensional case. We then discuss the applications of such height lower bounds to the Zilber-Pink conjecture. We show how all the variants quoted can be used to provide a crucial step toward the conjecture: once one knows (by other methods) that the height of the intersection under consideration is bounded, the Lehmer-like bounds allow to get finiteness.

1. Introduction

a. Objectifs. – Ces notes poursuivent trois buts assez distincts.

Classification mathématique par sujets (2000). – 11G50, 11G10, 14K15.

Mots clefs. – Hauteurs, problème de Lehmer, variétés abéliennes, tores, conjecture de Zilber-Pink.

Dans un premier temps (partie 2), nous proposons une introduction à la notion de hauteur. Celle-ci est tout à fait classique et ne prétend à aucune originalité. Le lecteur ayant déjà manipulé des hauteurs peut la sauter sans remords tandis que le novice devrait y trouver de quoi suivre le reste du texte (les autres prérequis se limitent, à quelques exceptions près, à des connaissances de base en géométrie algébrique et sur les variétés abéliennes).

Ensuite, nous présentons en partie 3 le classique problème de Lehmer sur la hauteur des nombres algébriques puis toute une famille de généralisations à diverses hauteurs normalisées. La formulation est nouvelle : basée sur un groupe Γ , elle englobe dans une seule définition les problèmes de Lehmer en dimension supérieure (où Γ est trivial ou égal au groupe des points de torsion) ainsi que le problème de Bogomolov effectif (lorsque Γ est le groupe de tous les points algébriques). Nous montrons aussi que toute conjecture absolue entraîne automatiquement une version plus fine, relative à un sous-groupe algébrique (voir théorème 3.7).

Enfin nous examinons (partie 4) comment ces généralisations s'appliquent à la conjecture de Zilber-Pink (précisément le cas constant sur une variété abélienne ou un tore). En effet, même si le problème de Lehmer est toujours ouvert sous toutes ses formes, nous connaissons dans de nombreux cas des versions faibles, généralisant le théorème de Dobrowolski, quelquefois dites à ε près (ici nous dirons que Γ est un groupe de Dobrowolski, voir définition 3.1). De plus, comme l'ont constaté les premiers Bombieri, Masser et Zannier [12] sur les tores, ces versions faibles suffisent pour les applications à la conjecture de Zilber-Pink. Nous décrivons ceci en deux temps : d'une part une version Lehmer (Γ de type fini) et d'autre part une version Bogomolov (Γ les points algébriques) qui débouche sur des énoncés de type Zilber-Pink plus Bogomolov. Dans les deux cas, ces applications ne donnent que la moitié de la réponse puisque l'on ne traite que les points de hauteur bornée ; il faut indépendamment montrer que la hauteur est bornée sur les ensembles considérés, mais ceci fait l'objet du cours de Ph. Habegger. Les résultats que nous démontrons dans cette partie sont essentiellement déjà connus mais nous en présentons de nouvelles démonstrations et nous traitons de la manière la plus proche possible les deux cas abélien et torique.

En appendice, nous avons regroupé quelques énoncés techniques qui servent dans plusieurs démonstrations des parties 3 et 4, particulièrement au paragraphe c de la partie 4. En épilogue, nous mentionnons quelques progrès réalisés entre l'écriture de ce texte et sa publication.

b. Conventions. – Dans la plus grande partie du texte, nous nous placerons dans la situation suivante.

Notations 1.1. – Soient k un corps de nombres et A un groupe algébrique connexe sur k muni d'une compactification $\bar{A}$ sur k , elle-même équipée d'un faisceau inversible ample $\mathcal{L} \in \text{Pic}(\bar{A})$. Nous supposons de plus être dans l'un des deux cas suivants :

- (1) *Cas abélien* : A est une variété abélienne, $\bar{A} = A$ et $\mathcal{L}$ est symétrique.
- (2) *Cas torique* : $A = \mathbb{G}_m^n$ et $\bar{A}$ est une compactification équivariante lisse de A .

Dans le cas torique (2), les choix usuels sont $\bar{A} = \mathbb{P}^n$ et $\bar{A} = (\mathbb{P}^1)^n$. Comme nous le verrons le choix d'une compactification n'aura pas d'influence sur nos énoncés ; on peut donc se restreindre à l'un de ces deux exemples. Toutefois nous sommes amenés dans les preuves à faire des éclatements et donc à faire intervenir d'autres compactifications.

Le cadre naturel de notre étude est très probablement celui des variétés semi-abéliennes, englobant (1) et (2), mais, en raison de diverses complications et en l'absence presque complète de résultats, nous repoussons un (rapide) examen du cas général à la dernière partie de ce texte.

Afin d'unifier au maximum les cas (1) et (2), nous utilisons toujours une notation additive sur A . Ainsi dans le cas torique 0 désignera le point $(1, \dots, 1)$ et mx le point $(x_1^m, \dots, x_n^m)$ si $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $m \in \mathbb{Z}$. De la même façon, nous ne parlerons pas de sous-variété abélienne dans le cas (1) ou de sous-tore dans le cas (2) mais uniformément de sous-groupe algébrique connexe ou de sous-variété semi-abélienne. Nous écrirons aussi souvent $s = 2$ dans le cas (1) et $s = 1$ dans le cas (2) de sorte que, par exemple, A a $N^{s \dim A}$ points de N -torsion et la hauteur normalisée est homogène de degré s sur A . Enfin nous utiliserons la notation $g = \dim A$ même si $g = n$ dans le cas (2).

L'autre convention importante concerne le corps de base : nous travaillerons majoritairement sur une clôture algébrique fixée $\bar{k}$ de k . Pour cette raison nous nous autorisons à écrire $x \in A$ en lieu et place de $x \in A(\bar{k})$ et, lorsque nous parlons d'une sous-variété V de A , nous faisons toujours référence à une sous-variété de A sur $\bar{k}$ c'est-à-dire précisément un sous-schéma fermé intègre V de $A_{\bar{k}} = A \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } \bar{k}$. Lorsque V provient d'un sous-schéma fermé de $A_L = A \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } L$ (notion cruciale pour le problème de Lehmer) pour un sous-corps $k \subset L \subset \bar{k}$, nous dirons que V est définie sur L .

Nous supprimons également la référence à $\bar{k}$ dans les notations suivantes : $\Gamma \subset A$ signifie $\Gamma \subset A(\bar{k})$; $\text{End}(A)$ désigne toujours $\text{End}(A_{\bar{k}})$ et, plus généralement, si A' est un autre groupe algébrique commutatif, $\text{Hom}(A, A')$ représente le groupe des morphismes de groupes algébriques $A_{\bar{k}} \rightarrow A'_{\bar{k}}$.

Enfin, de par la nature même du problème de Lehmer, le texte regorge de constantes. Elles dépendent généralement de $(A, \bar{A}, \mathcal{Z})$ et souvent du choix du groupe Γ considéré mais pas des points ou sous-variétés $\alpha, x, V \dots$ introduits ensuite (ceci sera précisé à chaque fois). Comme nous ne calculons quasiment aucune de ces constantes, nous employons souvent la lettre générique c (toujours un réel strictement positif) pour diverses quantités non significatives. En revanche, les constantes plus individualisées, comme $c_0, c_\Gamma(\varepsilon), \dots$ ne changent pas, elles, de valeur au fil du temps.

2. Hauteur

a. Sur les nombres algébriques. – Nous introduisons la hauteur logarithmique absolue de Weil qui est une fonction $h: \overline{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathbb{R}_+$ qui sert à « mesurer » les nombres

algébriques. Elle est très facile à définir sur $\mathbb{Q}$: pour $a, b \in \mathbb{Z}$ premiers entre eux avec $b \neq 0$, on pose

$$h(a/b) = \log \max(|a|, |b|).$$

Nous décrivons maintenant trois façons de définir l'extension à $\overline{\mathbb{Q}}$ de cette fonction.

1. Procédé limite. On définit tout d'abord une hauteur naïve de la façon suivante. Si $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ on note $\mu_\alpha = \sum_{i=0}^d a_i X^i$ son polynôme minimal dans $\mathbb{Z}[X]$ (avec $a_d > 0$) et l'on pose :

$$h_{\text{naïve}}(\alpha) = \frac{1}{d} \log \max_{0 \leq i \leq d} |a_i|.$$

La hauteur de Weil s'obtient par la formule :

$$h(\alpha) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} h_{\text{naïve}}(\alpha^n).$$

Il faut bien sûr vérifier que la limite existe (nous le verrons plus bas) ce qui est l'inconvénient d'utiliser cette approche comme définition. L'avantage est que ce procédé est celui qui servira dans la suite pour obtenir des hauteurs normalisées plus sophistiquées, comme la hauteur de Néron-Tate. Si l'on admet l'existence de la limite, on voit immédiatement sur la définition que $h(\alpha^n) = nh(\alpha)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et même, en utilisant $h_{\text{naïve}}(\alpha^{-1}) = h_{\text{naïve}}(\alpha)$, on trouve $h(\alpha^n) = |n|h(\alpha)$ pour $n \in \mathbb{Z}$ et $\alpha \neq 0$. Par suite on note aussi que si α est une racine de l'unité alors $h(\alpha) = 0$.

2. Mesure de Mahler. La deuxième définition possible, la plus facile à énoncer, se rattache à la mesure de Mahler. Pour $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ on utilise son polynôme minimal μ_α comme ci-dessus et l'on note $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ les racines de μ_α (les conjugués de α). On pose alors

$$h(\alpha) = \frac{1}{d} \log \left(a_d \prod_{i=1}^d \max(1, |\alpha_i|) \right).$$

Avec cette définition la quantité $\exp(dh(\alpha))$ s'appelle la mesure de Mahler de μ_α . Par la formule de Jensen, on trouve aussi :

$$h(\alpha) = \frac{1}{d} \int_0^1 \log |\mu_\alpha(e^{2i\pi t})| dt.$$

Si l'on majore dans cette formule $|\mu_\alpha(e^{2i\pi t})| \leq \sum_{i=0}^d |a_i| \leq (d+1) \max_{0 \leq i \leq d} |a_i|$, on trouve $h(\alpha) \leq h_{\text{naïve}}(\alpha) + \frac{\log(d+1)}{d}$. D'un autre côté, d'après les relations entre coefficients et racines, on a

$$(*) \quad a_j = a_d \sum_{\text{Card}(I)=d-j} \prod_{i \in I} (-\alpha_i)$$

où I désigne une partie de $\{1, \dots, d\}$. Ceci entraîne immédiatement

$$|a_j| \leq 2^d a_d \prod_{i=1}^d \max(1, |\alpha_i|)$$

puis $h_{\text{naïve}}(\alpha) \leq h(\alpha) + \log 2$.