Autour de la conjecture d'André-Oort

Emmanuel Ullmo

Panoramas et Synthèses

Numéro 52

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

Panoramas & Synthèses
52, 2017, p. 31–87

AUTOUR DE LA CONJECTURE D'ANDRÉ-OORT

par

Emmanuel Ullmo

Résumé. **–** Le texte est la version écrite des exposés donnés par l'auteur au CIRM en mai 2011 sur la preuve de la conjecture d'André-Oort sous l'hypothèse de Riemann généralisée due à Klingler, Ullmo et Yafaev. Il contient également une introduction à la théorie des variétés de Shimura.

***Abstract* (Around the André-Oort conjecture).** **–** The text is the written part of the lectures by the author at the CIRM in May 2011 on the proof of the André-Oort conjecture assuming the generalized Riemann hypothesis due to Klingler, Ullmo and Yafaev. It also contains an introduction to the theory of Shimura varieties.

1. Introduction

Le but de ce texte est de présenter la preuve de la conjecture d'André-Oort sous l'hypothèse de Riemann généralisée, (GRH dans la suite), pour les produits de courbes modulaire due à Edixhoven [**18**] et d'introduire les outils nécessaires à la compréhension de la preuve de cette conjecture pour une variété de Shimura arbitraire, sous GRH, due à Klingler, Yafaev et l'auteur de ces notes ([**40**], [**22**]). Les grandes lignes de la preuve de ces résultats sont présentées dans le texte compagnon de Yafaev dans ce volume. Ces deux textes sont les versions écrites et détaillées d'un cours donné en commun au CIRM en mai 2011 sur le sujet.

Il y a quatre parties correspondants aux quatre exposés oraux donnés par l'auteur du texte sur les huit du cours commun en question. Voici une très brève description du contenu de ces notes, la table des matières donnant une idée plus précise des thèmes abordés

***Classification mathématique par sujets* (2000).** **–** 11G15, 14G35, 22E40.
Mots clefs. **–** Variétés de Shimura, multiplication complexe, géométrie diophantienne, théorie ergodique.

La première partie présente la preuve due à Edixhoven de la conjecture d'André-Oort sous GRH pour les produits de courbes modulaires. Nous essayons de dégager les étapes qui se retrouvent dans la preuve du cas général.

La deuxième partie introduit les notions de bases de la théorie des variétés de Shimura. L'accent est mis sur les ingrédients intervenant dans l'énoncé et la preuve de la conjecture d'André-Oort sous GRH. On insiste particulièrement sur les définitions et propriétés des sous-variétés spéciales et on explique certaines propriétés dues à Edixhoven et Yafaev d'irréductibilité d'image de sous-variétés des variétés de Shimura par des opérateurs de Hecke.

Dans les deux dernières sections on développe les outils nécessaires à la compréhension de la partie ergodique de la preuve de la conjecture d'André-Oort sous GRH. On explique en particulier les principes de bases de la théorie ergodique sur « $\Gamma\backslash G(\mathbb{R})$ » pour un réseau arithmétique Γ d'un groupe algébrique. Les résultats de Ratner sur la dynamique des flots unipotents sont décrits. Le théorème d'équidistribution des sous-variétés fortement spéciales est expliqué dans la dernière section.

Notons enfin que les progrès récents sur la conjecture d'André-Oort sans GRH impulsés par Pila sont décrits dans ce volume dans la contribution de Scanlon et dans le texte introductif de l'auteur.

2. La conjecture d'André-Oort pour un produit de courbes modulaires

Le but de cette partie est de décrire la preuve d'Edixhoven **[17]** **[18]** de la conjecture d'André-Oort sous GRH pour un produit de courbes modulaires. La plupart des énoncés obtenus dans ce cadre s'étendent aux variétés de Shimura arbitraires. La stratégie ainsi dégagée par Edixhoven a donc été centrale dans tous les travaux postérieurs sur la conjecture d'André-Oort sous GRH.

2.1. La conjecture d'André-0ort pour un produit de 2 courbes modulaires

2.1.1. *Courbes modulaires.* – Nous nous intéresserons dans cette partie à la variété de Shimura la plus simple : la courbe modulaire

$$Y_0(1) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}$$

où $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Im}(z) > 0\}$ est le demi-plan de Poincaré et

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in M_2(\mathbb{Z}) |\ \mathrm{ad} - bc = 1\}$$

est le groupe modulaire.

Un des intérêts principaux des variétés de Shimura est que l'on dispose de deux descriptions de nature différentes qui donnent des informations complémentaires. Les variétés de Shimura sont des *espaces localement symétriques hermitiens* et des *espaces de modules pour des « objets intéressants »* (typiquement des variétés abéliennes ou plus généralement des structures de Hodge). Nous développerons ces deux points de vue pour une variété de Shimura générale dans la section 3. Nous nous contenterons de donner dans cette partie ces descriptions pour la courbe modulaire.

La description de $\mathbb{H}$ comme espace symétrique hermitien est donnée par

$$\mathbb{H} = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/K_\infty$$

où

$$K_\infty \simeq \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

est un sous-groupe compact maximal de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.

On a une action par homographies de $GL_2(\mathbb{R})^+$ sur $\mathbb{H}$, donné pour $\alpha = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$ et $z \in \mathbb{H}$ par

$$\alpha.z = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Dans cette description

$$K_\infty = \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{Fix}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}(\sqrt{-1}),$$

de sorte que l'isomorphisme $SL_2(\mathbb{R})/\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{H}$ est donné par $g.\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \mapsto g.\sqrt{-1}$.

Soit B le sous-groupe de Borel de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ des matrices triangulaires supérieures. Au vu de la décomposition d'Iwasawa $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) = B\ \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ on peut préciser l'isomorphisme précédent :

$$\begin{pmatrix} y^{\frac{1}{2}} & xy^{\frac{-1}{2}} \\ 0 & y^{\frac{-1}{2}} \end{pmatrix}.\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \mapsto z = x + \sqrt{-1}y.$$

On dispose d'une mesure $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$-invariante $\mu = \frac{dxdy}{y^2}$ sur $\mathbb{H}$. Le groupe modulaire $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ agit de manière proprement discontinue sur $\mathbb{H}$ et le quotient $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}$ est de μ-volume fini $\frac{\pi}{3}$. On dit que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ est un réseau de $\mathbb{H}$ (par analogie avec le cas des variétés abéliennes) et le quotient d'un espace symétrique hermitien par un réseau est par définition un espace localement symétrique hermitien.

L'invariant j donne un isomorphisme $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H} \to \mathbb{C} = \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ et muni $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}$ d'une structure de variété algébrique quasi-projective.

Du point de vue modulaire $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}$ est un espace de module pour les classes d'isomorphismes de courbes elliptiques sur $\mathbb{C}$. Dans cette description on associe à $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\tau$ la courbe elliptique $E_\tau \simeq \mathbb{C}/\Gamma_\tau$ sur $\mathbb{C}$ où Γ_τ désigne le réseau $\mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z}$ de $\mathbb{C}$. Il est classique que toute courbe elliptique sur $\mathbb{C}$ est de la forme $E \simeq E_\tau$ pour un $\tau \in \mathbb{H}$ et que deux courbes elliptiques E_τ et $E_{\tau'}$ sont isomorphes (comme surfaces de Riemann de genre 1 avec une origine) si et seulement si il existe $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ tel que $\tau' = \gamma\tau$.

Il existe enfin un *modèle canonique* $Y_0(1)_{\mathbb{Q}}$ sur $\mathbb{Q}$ qui est un espace de module grossier pour les courbes elliptiques sur $\mathbb{Q}$ (voir [**15**]). On a donc un isomorphisme $Y_0(1)_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{C} \simeq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}$ et $Y_0(1)_{\mathbb{Q}} \simeq \mathbb{A}^1_{\mathbb{Q}}$.

2.1.2. *Multiplication complexe des courbes elliptiques.* – Soit E une courbe elliptique sur $\mathbb{C}$. On sait que $E = \mathbb{C}/\Lambda$ pour un réseau Λ de $\mathbb{C}$. Un endomorphisme de E est donné par la multiplication par un élément $z \in \mathbb{C}$ tel que $z\Gamma \subset \Gamma$. Si $\mathrm{End}(E) = \mathbb{Z}$, on dit que E est sans multiplication complexe. C'est la situation *générique*, un terme auquel on donnera un sens précis dans le cadre des variations de structures de Hodge à la section 3.1.4. Si ce n'est pas le cas, $\mathrm{End}(E)$ est un ordre dans un corps quadratique imaginaire F. Soit O_F l'anneau des entiers de F, alors un ordre dans F est de la forme

$$O_{F,f} = \mathbb{Z} + fO_F$$

pour un entier $f \geq 1$. On note $\mathrm{Pic}(O_{F,f})$ le groupe de Picard (i.e. le groupe de classes) de $O_{F,f}$. Quand $\mathrm{End}(E) = O_{F,f}$, on dit que E est à multiplication complexe par $O_{F,f}$. Pour plus de détails et certaines preuves le lecteur peut consulter [**35**] et [**38**] ch. XI.

Proposition 2.1. – *L'ensemble $\Sigma_{F,f}$ des classes d'isomorphismes de courbes elliptiques E telles que $\mathrm{End}(E) = O_{F,f}$ est un $\mathrm{Pic}(O_{F,f})$-torseur. Il est en particulier fini de cardinal $h_f := |\mathrm{Pic}(O_{F,f})|$.*

Une conséquence qui nous sera utile est donnée par le théorème de Brauer-Siegel ([**23**] ch. XVI).

Théorème 2.2. – *Soit E une courbe elliptique à multiplication complexe par $O_{F,f}$, alors*

$$|\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F).E| = |\mathrm{Pic}(O_{F,f})| = |\mathrm{disc}(\mathrm{End}(E))|^{\frac{1}{2}+o(1)}$$

quand $|\mathrm{disc}(\mathrm{End}(E))| \to \infty$.

Soit Λ un $O_{F,f}$-module projectif de rang 1, alors $E = \mathbb{C}/\Lambda$ a multiplication complexe par $O_{F,f}$. Si Λ et Λ' sont deux tels $O_{F,f}$-modules projectifs de rang 1 alors $\mathbb{C}/\Lambda \simeq \mathbb{C}/\Lambda'$ si et seulement si Λ et Λ' ont la même classe dans $\mathrm{Pic}(O_{F,f})$. Réciproquement soit $E = \mathbb{C}/\Lambda$ ayant multiplication complexe par $O_{F,f}$, alors $\Lambda = \pi_1(E, 0)$ est un $O_{F,f}$-module de rang 1 dont les endomorphismes sont exactement $O_{F,f}$. Ceci entraine que Λ est projectif de rang 1.

L'opération de $\mathrm{Pic}(O_{F,f})$ sur $\Sigma_{F,f}$ est donné par

$$\Lambda.\mathbb{C}/\Lambda' = \mathbb{C}/\Lambda \otimes_{O_{F,f}} \Lambda'.$$

On dispose alors du théorème classique suivant :

Théorème 2.3. – *Soit E à multiplication par $O_{F,f}$.*

(1) *$j(E)$ est un entier algébrique dans l'extension abélienne maximale de F non ramifiée en dehors de f.*

L'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)$ sur $\Sigma_{F,f}$ est donnée par un homomorphisme surjectif dit de réciprocité $r = r_{F,f} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F) \to \mathrm{Pic}(O_{F,f})$. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier non ramifié dans $O_{F,f}$ et $F(\mathfrak{p})$ le Frobenius correspondant alors

$$r(F(\mathfrak{p})) = [\mathfrak{p}]^{-1}.$$

Autrement dit

$$(\mathbb{C}/\Lambda)^{F(\mathfrak{p})} = \mathbb{C}/\Lambda \otimes_{O_{F,f}} \mathfrak{p}^{-1}.$$