

QUELQUES ASPECTS DES SYSTÈMES DYNAMIQUES POLYNOMIAUX

—

INTRODUCTION

Serge Cantat



Panoramas et Synthèses

Numéro 30

2010

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

QUELQUES ASPECTS DES SYSTÈMES DYNAMIQUES POLYNOMIAUX

INTRODUCTION

par

Serge Cantat

Ce volume regroupe quatre articles concernant l'itération des transformations polynomiales ou rationnelles des variétés projectives. Le but n'est pas d'établir un panorama global de la dynamique des transformations rationnelles, mais de présenter quelques problèmes qui se situent au confluent de la géométrie algébrique, de la géométrie diophantienne, des systèmes dynamiques et de l'analyse harmonique.

En guise d'introduction, nous partirons d'une question de géométrie diophantienne formulée par le père des systèmes dynamiques, Henri Poincaré. Ceci nous conduira à présenter plusieurs concepts qui joueront un rôle central tout au long de ce volume.

Courbes elliptiques et variétés abéliennes. – Soit A une courbe cubique lisse du plan projectif, qui est définie par une équation homogène à coefficients rationnels et qui est munie d'au moins un point à coordonnées rationnelles. Par un changement de coordonnées linéaire à coefficients rationnels, l'équation de A peut être mise sous forme de Weierstrass,

$$y^2z = 4x^3 + axz^2 + bz^3,$$

où a et b sont rationnels et $[x : y : z]$ désigne les coordonnées homogènes obtenues après ce changement de variables. L'ensemble des solutions complexes de cette équation forme une surface de Riemann $A(\mathbf{C})$ qui est holomorphiquement difféomorphe au quotient de la droite complexe $\mathbf{C}$ par un réseau cocompact Λ , (voir [11], [14])

$$A(\mathbf{C}) = \mathbf{C}/\Lambda.$$

Nous pouvons choisir cet isomorphisme pour que la classe de l'origine $0 \in \mathbf{C}$ modulo Λ corresponde au point $[0 : 1 : 0]$ de A . On munit ainsi $A(\mathbf{C})$ d'une structure de groupe additif issue de celle de $(\mathbf{C}, +)$ pour laquelle $[0 : 1 : 0]$ est l'élément neutre. Ces choix étant faits, trois points P_1 , P_2 et P_3 de $A(\mathbf{C})$ ont une somme nulle si, et seulement s'ils sont alignés dans $\mathbb{P}^2(\mathbf{C})$. Ainsi, l'inverse $-M$ d'un point M est obtenu en prenant son symétrique par rapport à l'axe des x .

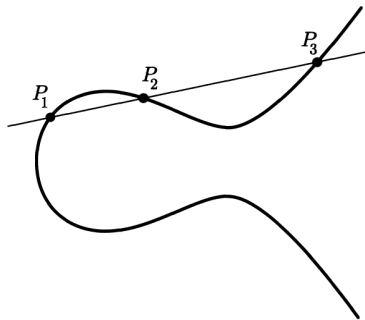


FIGURE 1. Addition sur une cubique.

Lorsque P_1 et P_2 sont des points de $A(\mathbf{Q})$, le troisième point d'intersection de la droite (P_1P_2) avec A est à coordonnées rationnelles. L'ensemble $A(\mathbf{Q})$ des points rationnels de A forme donc un sous-groupe de $(A(\mathbf{C}), +)$. En 1901, Poincaré définit le rang de la courbe A comme étant celui du groupe abélien $A(\mathbf{Q})$ puis s'interroge sur les valeurs possibles de ce nombre (voir [13]) :

« Quelles valeurs peut-on attribuer au nombre entier que nous avons appelé rang d'une cubique rationnelle ? Quelles sont, parmi les catégories que nous venons d'énumérer et qui sont jusqu'ici logiquement possibles, celles qui existent réellement ? »

Cette question est encore largement ouverte. Le premier résultat important affirme que le rang de A est fini. Il est dû à Mordell, en 1922. Plus généralement, si A est une variété abélienne de dimension k , c'est-à-dire une variété projective pour laquelle $A(\mathbf{C})$ est isomorphe à un quotient compact du groupe $\mathbf{C}^k$, et si A est définie sur un corps de nombres $\mathbb{L}$, alors $A(\mathbb{L})$ est un groupe abélien de type fini. Ce théorème est dû à Weil, en 1928.

Une des idées mises au point dans ce contexte est au cœur du présent ouvrage : il s'agit d'introduire la notion de hauteur d'un point rationnel, et d'étudier le comportement de la hauteur d'un point z de $A(\mathbf{Q})$ lorsque celui-ci est changé en l'un de ses multiples mz , avec $m \in \mathbf{Z}$.

Hauteurs et itérations. – Soit p un point de l'espace projectif $\mathbb{P}^k(\mathbf{Q})$. Ce point possède alors des coordonnées homogènes entières $[x_0 : x_1 : \dots : x_k]$ qui sont globalement premières entre elles ; un tel choix de coordonnées est unique à multiplication près de celles-ci par -1 . La hauteur $h(p)$ de p est alors définie par

$$h(p) = \log \max_{i=0, \dots, k} (|x_i|) ;$$

elle décrit le nombre de chiffres qui apparaît dans l'écriture de p à l'aide de coordonnées entières.

Lorsque W est une sous-variété de l'espace projectif qui est définie sur $\mathbf{Q}$, la hauteur peut être restreinte à $W(\mathbf{Q})$. Ce procédé fournit donc une hauteur permettant de

mesurer la taille des points de $W(\mathbf{Q})$, ceci pour chaque plongement de W dans un espace projectif (défini sur $\mathbf{Q}$).

Reprenons l'exemple d'une variété abélienne A , définie sur $\mathbf{Q}$, et désormais munie d'une hauteur $h : A(\mathbf{Q}) \rightarrow \mathbf{R}^+$. La multiplication par un entier m sur le groupe additif $A(\mathbf{C})$ produit un endomorphisme f_m de A qui permute les points de $A(\mathbf{Q})$. Il se trouve que la fonction

$$|h(f_m(p)) - m^2 h(p)|$$

est bornée sur $A(\mathbf{Q})$. Suivant une astuce de Tate datant de 1964 (voir [9]), la limite

$$\hat{h}(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{m^{2n}} h((f_m)^n(p))$$

détermine une fonction sur $A(\mathbf{Q})$ pour laquelle

1. $\hat{h}(f(p)) = m^2 \hat{h}(p)$ pour tout point p de $A(\mathbf{Q})$;
2. $|\hat{h} - h|$ est bornée sur $A(\mathbf{Q})$.

La hauteur $\hat{h}$ associée à f_m est appelée *hauteur canonique*, ou hauteur de Tate de f_m .

Voici un autre exemple pour lequel la hauteur peut être modifiée par un procédé itératif afin de lier ses propriétés arithmétiques à la dynamique d'une transformation algébrique. Soit f un endomorphisme de l'espace projectif $\mathbb{P}^k_{\mathbf{Q}}$. En coordonnées homogènes $[x_0 : \dots : x_k]$, f est défini par $k + 1$ polynômes homogènes à coefficients rationnels P_i qui ont même degré $d > 1$ et n'ont pas de zéro commun excepté l'origine $(0, \dots, 0)$:

$$f[x_0 : \dots : x_k] = [P_0(x_0, \dots, x_k) : \dots : P_k(x_0, \dots, x_k)].$$

Il se trouve alors que la différence des fonctions $p \mapsto d h(p)$ et $p \mapsto h \circ (f(p))$ est encadrée par deux constantes ne dépendant pas du point $p \in \mathbb{P}^k(\mathbf{Q})$. Le procédé de Tate produit donc à nouveau une hauteur $\hat{h}$ sur $\mathbb{P}^k(\mathbf{Q})$ satisfaisant $\hat{h}(f(p)) = d \hat{h}(p)$ pour laquelle $|\hat{h} - h|$ est bornée.

La hauteur canonique porte des informations dynamiques non triviales. Elle peut être étendue à l'ensemble des points de la variété à coordonnées dans la clôture algébrique $\bar{\mathbf{Q}}$ de $\mathbf{Q}$. Ainsi étendue, elle peut donc être évaluée sur les points périodiques isolés de la transformation f étudiée, car ceux-ci sont définis par un système d'équations à coefficients rationnels. Il se trouve alors qu'un point p de la variété à coordonnées dans $\bar{\mathbf{Q}}$ a une orbite finie si et seulement si sa hauteur canonique est nulle (voir [12]). Nous allons maintenant décrire des relations plus profondes entre dynamique et hauteur.

Dynamique et entropie topologique. – Que ce soit la multiplication par un entier $m > 1$ sur une variété abélienne ou les endomorphismes de degré $d > 1$ sur un espace projectif, ces deux familles de transformations développent une dynamique intéressante. Ceci avait bien sûr été observé depuis la fin du dix-neuvième siècle, puis largement étudié durant la première moitié du vingtième, notamment par Julia et Fatou (voir [2]).

Autour de 1964, donc à l'époque où Tate dégage la notion de hauteur canonique, apparaît une nouvelle façon de mesurer la complexité d'un système dynamique. Il

s'agit de la notion d'entropie topologique, à laquelle il sera régulièrement fait référence dans ce volume.

Ce concept, introduit par Adler, Konheim et McAndrew (voir [1]), peut être défini comme suit. Soit $f : X \rightarrow X$ une transformation continue d'un espace métrique compact. Soient n un entier positif et ϵ un réel strictement positif. On dit que deux points x et y de X ont la même orbite à la précision ϵ sur la période n si la distance entre $f^j(x)$ et $f^j(y)$ est inférieure à ϵ pour tout entier j entre 0 et n . Lorsque n tend vers l'infini, à ϵ fixé, le nombre d'orbites que l'on peut ainsi distinguer croît au plus exponentiellement vite. L'entropie topologique $h_{top}(f)$ mesure ce taux de croissance exponentiel, dans la limite où ϵ tend vers 0 (voir le premier chapitre de [4]).

Pour une isométrie de X , l'entropie est nulle. Pour la multiplication par m sur une variété abélienne complexe de dimension k l'entropie topologique vaut $2k \log(m)$ et pour un endomorphisme de $\mathbb{P}^k(\mathbf{C})$ défini par des polynômes homogènes de degré d elle est égale à $k \log(d)$ (voir [7]).

À elle seule, la positivité de l'entropie montre que la dynamique de ces transformations est riche. Pour la multiplication par m sur une variété abélienne complexe $A(\mathbf{C})$, ceci se traduit, entre autres, dans le fait que les points périodiques de f_m sont répulsifs et denses dans $A(\mathbf{C})$: un point est périodique si et seulement si c'est un point de torsion de A , et la dérivée de f^n en chaque point périodique de période n est une homothétie de rapport $m^n > 1$. Voyons ce qui reste de ces remarques simples pour certains endomorphismes de la droite projective.

Mesure d'équilibre et équidistribution. – Toujours en 1964, Brolin rédige un article concernant la dynamique des polynômes d'une variable complexe [3].

Soit $P \in \mathbf{C}[z]$ un polynôme dont le degré d est strictement plus grand que 1. Le polynôme P détermine un endomorphisme

$$f[x_0 : x_1] = [P(x_0/x_1)x_1^d : x_1^d].$$

de $\mathbb{P}^1(\mathbf{C}) = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ qui fixe le point à l'infini $\infty = [1 : 0]$. Ce point fixe est attractif : si z est suffisamment proche de ∞ la suite $(f^n(z))$ converge vers ∞ . Par définition, l'ensemble de Julia rempli de f , noté $K(f)$, est l'ensemble des points z de $\mathbf{C}$ dont l'orbite $\{z, f(z), f^2(z), \dots, f^n(z), \dots\}$ est bornée. Le complémentaire de $K(f)$ est le bassin d'attraction de l'infini ; autrement dit, z est hors de $K(f)$ si, et seulement si la suite $(f^n(z))$ tend vers ∞ avec n .

L'ensemble $K(f)$ est un sous-ensemble compact de $\mathbf{C}$. La théorie du potentiel associe alors à $K(f)$ sa « mesure d'équilibre » μ_f : il s'agit de la mesure de probabilité supportée par le bord de $K(f)$ qui, parmi les mesures de probabilité à support dans $K(f)$, minimise l'intégrale d'énergie

$$\int_{a \in K(f)} \int_{b \in K(f)} \log \frac{1}{|a - b|} d\mu(a) d\mu(b).$$

Brolin démontre que

1. f préserve la mesure μ_f : si B est un borélien, $\mu_f(B)$ est égal à $\mu_f(f^{-1}(B))$;