QUELQUES ASPECTS DES SYSTÈMES DYNAMIQUES POLYNOMIAUX

Serge Cantat

Panoramas et Synthèses

Numéro 30

2010

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

Panoramas & Synthèses
30, 2010, p. 13–95

QUELQUES ASPECTS DES SYSTÈMES DYNAMIQUES POLYNOMIAUX EXISTENCE, EXEMPLES, RIGIDITÉ

par

Serge Cantat

Résumé. – Nous décrivons les propriétés de base concernant la dynamique et la géométrie des transformations holomorphes et méromorphes des variétés complexes, compactes, kählériennes. En particulier, nous expliquons les contraintes qu'imposent la géométrie de la variété à l'existence de telles transformations. Nous donnons des exemples de telles transformations avec une dynamique intéressante, puis nous expliquons comment certaines contraintes naturelles sur la dynamique rigidifie celle-ci et permet de classer toutes les transformations réalisant ces contraintes.

Abstract **(Topics on polynomial dynamical systems: Existence, Examples, Rigidity.)**
We describe basic properties of the dynamics and geometry of holomorphic and meromorphic transformations of compact, kähler manifolds. In particular, we describe how the geometry of the manifold constrains the existence of transformations. Examples of holomorphic transformations with an interesting dynamics are described. Then, we explain how natural hypothesis on the dynamics rigidify it and enable us to list of transformations that realize these hypothesis.

1. Introduction

1.1. Dynamique holomorphe. – Donnons nous une variété projective complexe M et une transformation f de M qui est holomorphe ou rationnelle. En itérant cette transformation, nous obtenons un système dynamique « polynomial » à temps discret : seconde après seconde, un point z de l'ensemble M se déplace en $z_1 = f(z)$, puis en $z_2 = f(z_1)$, en $z_3 = f(z_2)$ ... Un mouvement dynamique régi suivant la règle d'évolution édictée par f se développe ainsi sur la variété M.

Voici un exemple d'une telle transformation dû à Mazur et McMullen. Considérons l'ensemble $X(\mathbf{R})$ constitué des solutions en nombres réels de l'équation

$$(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)+7xyz = 13/10.$$

Classification mathématique par sujets **(2010).** – 14E07, 14J50, 37F99, 32H50.

L'équation est de degré 2 par rapport à la variable x. À tout point (x, y, z) de $X(\mathbf{R})$ correspond donc un second point (x', y, z) : ceci détermine une involution de $X(\mathbf{R})$ qui s'exprime par des fractions rationnelles en (x, y, z),

$$(x', y, z) = \left(-x - \frac{7yz}{(1+y^2)(1+z^2)}, y, z\right).$$

Cette remarque vaut aussi pour la variable y ou la variable z et permet donc de construire trois involutions de $X(\mathbf{R})$. La transformation rationnelle obtenue en composant ces trois involutions est un difféomorphisme f de la surface $X(\mathbf{R})$: sur la figure 1, nous avons représenté les orbites $\{z, f(z), \ldots\}$ de six mille points de $X(\mathbf{R})$ en itérant f trois mille fois pour chaque point. On distingue plusieurs types d'orbites : certaines restent confinées sur des courbes fermées tandis que d'autres paraissent remplir une partie importante de $X(\mathbf{R})$. Pour cet exemple, il semble probable qu'il existe un ensemble dense de points périodiques elliptiques, chacun étant entouré par des courbes fermées simples elles mêmes périodiques. La partie de droite de la figure 1 représente la variété instable de l'un des points périodiques hyperboliques de f.

Ce texte concerne l'étude de ce type de systèmes dynamiques ; il porte sur deux aspects :

(a) l'existence de telles dynamiques polynomiales ;
(b) la classification des systèmes dynamiques polynomiaux ou rationnels dont la dynamique est la plus régulière.

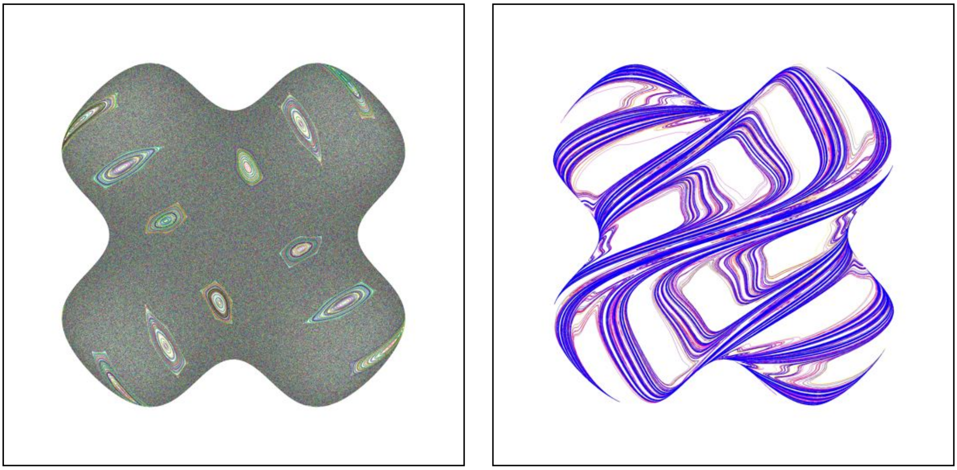

Figure 1. Dynamique sur une surface. La figure de gauche représente les orbites de quelques points pour un difféomorphisme polynomial d'une surface algébrique réelle. Celle de droite représente la variété instable de l'un des points périodiques hyperboliques de ce difféomorphisme. (image obtenue à l'aide d'un programme développé par C. McMullen et V. Pit)

Pour cela, nous aurons besoin de connaître certaines propriétés de la dynamique des transformations rationnelles. Nous les décrirons succinctement et le lecteur trouvera de nombreux compléments dans le texte de ce volume rédigé par Guedj.

1.2. Géométrie et classification. – Le premier chapitre relève essentiellement du domaine de la géométrie algébrique complexe. Une variété complexe projective M (ou, plus généralement, compacte et kählérienne) étant donnée, nous chercherons des conditions permettant d'assurer ou d'exclure l'existence de transformations rationnelles $f : M \dashrightarrow M$ qui donnent naissance à une dynamique chaotique sur M. La présence de telles transformations impose des contraintes fortes à la géométrie (algébrique et analytique) de M. Le théorème suivant, dû à Beauville, illustre bien ces contraintes :

Si M est une hypersurface lisse de $\mathbb{P}^{k+1}(\mathbf{C})$ dont la dimension est supérieure ou égale à trois, et si M n'est pas un hyperplan, alors M ne possède aucun endomorphisme holomorphe dont le degré topologique est strictement supérieur à 1.

Un second exemple instructif est celui des variétés homogènes compactes : dans ce cas, le groupe des difféomorphismes holomorphes agit transitivement sur la variété et celle-ci possède donc de nombreuses transformations holomorphes. Nous verrons par contre, dans ce contexte, que les endomorphismes de degré topologique strictement supérieur à 1 proviennent uniquement des endomorphismes des espaces projectifs et des nilvariétés (voir le paragraphe 5.4).

Nous pouvons donc retenir comme principe général que les variétés projectives complexes ayant une dynamique polynomiale riche sont rares. De surcroît, lorsqu'une variété projective est susceptible d'admettre un tel système dynamique, il est difficile de déterminer précisément l'ensemble de ses transformations holomorphes ou rationnelles. Nous verrons par exemple que, à l'heure actuelle, on ne sait pas déterminer les surfaces dont le groupe des difféomorphismes holomorphes contient un groupe libre non abélien, ni celles qui possèdent une transformation rationnelle dominante non inversible.

1.3. Exemples. – On dispose toutefois d'exemples très riches. Leurs propriétés dynamiques sont remarquables et peuvent parfois être utilisées pour confirmer, dans des cas simples, certaines conjectures portant sur la géométrie de la variété M. Nous avons donc saisi l'occasion d'écrire ce texte pour regrouper dans un deuxième chapitre quelques exemples actuellement éparpillés dans la littérature. Ceci permettra d'exhiber des transformations holomorphes ou rationnelles sur des variétés pour lesquelles il est souvent dificile d'en construire, mais aussi de présenter des transformations rationnelles avec des propriétés dynamiques particulières. En guise d'exemple, signalons le résultat suivant (Bedford et Kim, McMullen, Cantat) :

Il existe un difféomorphisme holomorphe f d'une surface projective complexe (rationnelle) tel que

(i) *le nombre de points périodiques de f de période n croît exponentiellement vite avec n ;*
(ii) *ces points périodiques s'équidistribuent, quand n tend vers l'infini, vers une mesure qui est singulière vis-à-vis de la mesure de Lebesgue.*

1.4. Rigidité. – Le troisième chapitre mélange dynamique et géométrie : il s'agit de classer les transformations méromorphes ou holomorphes des variétés kählériennes dont la dynamique est riche et possède une certaine régularité uniforme. Nous verrons ainsi le résultat suivant de Berteloot, Dupont, Loeb et Zdunick :

Soit f un endomorphisme holomorphe de l'espace projectif complexe $\mathbb{P}^k(\mathbf{C})$ dont le degré topologique $\deg_{\mathrm{top}}(f)$ est supérieur à 2. Si les points périodiques de f de période n s'équidistribuent vers une mesure qui est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, il existe un tore $\mathbf{C}^k/\Lambda$, une transformation affine holomorphe F de ce tore et un revêtement ramifié $\pi : \mathbf{C}^k/\Lambda \to \mathbb{P}^k(\mathbf{C})$ tel que

$$f \circ \pi = \pi \circ F.$$

De plus, F est une similitude de rapport $(\deg_{\mathrm{top}}(f))^{1/2k}$.

En imposant des contraintes naturelles à la dynamique il est donc possible de classer les transformations à conjugaison holomorphe ou rationnelle près. La grande rigidité des transformations holomorphes ou rationnelles s'y voit ainsi confirmée. Ceci souligne en outre le caractère « sauvage » de la dynamique des transformations qui ne relèvent pas de ces classifications.

1.5. Remerciements et excuses. – Merci aux personnes qui ont relu tout ou partie de ce texte, notamment aux rapporteurs, à Katia Amerik, Pascal Autissier, Dominique Cerveau, Antoine Chambert-Loir, Thomas Dedieu, Julie Deserti, Christophe Dupont, Charles Favre, Vincent Guedj, Nessim Sibony, John Smillie, Claire Voisin et à Jean-Christophe Yoccoz.

L'essentiel de ce texte a été écrit en 2006 et 2007. Mes goûts personnels m'avaient déjà conduit à des choix forcément discutables. S'ajoute maintenant l'absence flagrante de développements récents fondamentaux, qui ne sont pas mentionnés, si ce n'est sous forme de références trop rares pour donner un aperçu réaliste de l'état des connaissances. J'espère que le lecteur y trouvera les pistes suffisantes pour compléter ce survol, et je présente mes excuses aux auteurs dont les travaux n'ont pas ici la place qu'ils méritent.